

DIFFERENTIALGEOMETRIE 2 KRÜMMUNG UND TOPOLOGIE

Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti und Kevin Emanuel Wiegand

16. Mai 2020

Hinweis

Der Inhalt dieses Skripts dient als Erklärung und Ergänzung (durch Details, Motivationen, Aufgaben) des Lehrstoffs, der in der Vorlesung diskutiert wurde. Ich bin für die Meldung von Fehlern (kleinen und großen) in dem Text sehr dankbar. Bitte eine Email an das elektronische Postfach gbenedetti@mathi.uni-heidelberg.de schicken. Die Beispiele und Aufgaben, die mit einem Asterisk bezeichnet sind, sind nicht klausurrelevant.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Motivation | 3 |
| 1.1 | Woher kommen wir? | 3 |
| 1.2 | Wohin gehen wir? | 6 |
| 2 | Von Euklidischer bis zur Riemannschen Geometrie | 9 |
| 2.1 | Euklidische Norm und Abstand | 9 |
| 2.2 | Kurven im \mathbb{R}^n und euklidische Länge | 10 |
| 2.3 | Riemannsche Mannigfaltigkeiten | 14 |
| 3 | Konstruktion von Riemannschen Metriken | 19 |
| 3.1 | Pseudo-Riemannsche Metriken | 19 |
| 3.2 | Konforme PR-Metriken und Existenz von R-Metriken | 21 |
| 3.3 | Orthogonalität und Pseudo-Riemannsche Immersionen | 22 |
| 3.4 | Isometrien | 26 |
| 3.5 | 1-dimensionale PR-Mannigfaltigkeiten und reguläre Kurven | 31 |
| 3.6 | Verzerrte Produkte | 33 |
| 3.7 | PR-Submersionen | 35 |
| 3.8 | Quotienten | 37 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4 | Geodätische | 41 |
| 4.1 | Kovariante Ableitungen auf pseudoorthogonalen Bündeln | 42 |
| 4.2 | Torsion und Pullback | 44 |
| 4.3 | Die Levi-Civita Ableitung | 46 |
| 4.4 | Das geodätische Vektorfeld | 49 |
| 4.5 | Die Exponentialabbildung | 52 |
| 4.6 | Das Lemma von Gauß | 55 |
| 4.7 | Gleichmäßige Normalumgebungen und lokal minimierende Kurven | 62 |
| 4.8 | Existenz von minimierenden Kurven | 64 |
| 4.9 | Der Satz von Hopf-Rinow | 66 |
| 4.10 | Geodätische Vollständigkeit | 68 |
| 5 | Orientierung und Integral von Formen | 74 |
| 5.1 | Orientierung auf Vektorräumen | 74 |
| 5.2 | Orientierung auf Vektorbündeln | 77 |
| 5.3 | Die Volumenform eines orientierten pseudoorthogonalen Vektorbündels | 81 |
| 5.4 | Orientierung von Mannigfaltigkeiten | 84 |
| 5.5 | Integral von n -Formen auf n -dimensionalen orientierten Mannigfaltigkeiten | 86 |
| 5.6 | Mannigfaltigkeiten mit Rand | 90 |
| 5.7 | Das äußere Differential und der Satz von Stokes | 92 |
| 6 | Krümmung von PR-Mannigfaltigkeiten | 95 |
| 6.1 | Die Symmetrien der Krümmung | 95 |
| 6.2 | Krümmung von isometrischen Immersionen | 100 |
| 6.3 | Ricci- und Skalarkrümmung | 107 |
| 6.4 | Die Taylor-Entwicklung der Metrik in Normalkoordinaten | 109 |
| 7 | Der Satz von Gauß–Bonnet | 111 |
| 7.1 | Die infinitesimale Version des Satzes von Gauß–Bonnet | 111 |
| 7.2 | Orientierte Flächen mit Rand und Ecken | 115 |
| 7.3 | Die globale Version des Satzes von Gauß–Bonnet | 118 |
| 8 | Krümmung und Topologie in höherer Dimension | 122 |
| 8.1 | Familien von Kurven | 122 |
| 8.2 | Jacobi-Felder | 124 |
| 8.3 | Der Satz von Killing–Hopf | 127 |
| 8.4 | Der Satz von Cartan–Hadamard | 129 |
| 8.5 | Cartan–Hadamard Mannigfaltigkeiten | 132 |
| 8.6 | Der Satz von Cartan | 135 |
| 8.7 | Der Satz von Preissmann (nicht klausurrelevant) | 136 |
| 8.8 | Erste und zweite Variation der Länge | 139 |
| 8.9 | Der Satz von Bonnet–Myers | 143 |
| 8.10 | Die Sätze von Weinstein und Synge (nicht klausurrelevant) | 145 |

1 Motivation

1.1 Woher kommen wir?

Im Modul Differentialgeometrie 1 haben wir glatte Mannigfaltigkeiten eingeführt als Räume die lokal diffeomorph zu \mathbb{R}^n sind und vernünftige globale topologische Eigenschaften (Hausdorffsch und mit abzählbarer Basis) besitzen.

Wesentliche Beispiele von solchen Räumen werden auf natürlicher Weise als Untermannigfaltigkeiten vom euklidischen Raum (zum Beispiel die Sphäre S^n) oder als Quotienten (der Torus \mathbb{T}^n , oder der reelle und komplexe projektive Raum $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$) konstruiert. Eine Klasse von besonderer Bedeutung sind Lie-Gruppen, die oft als Matrixgruppen auftreten (Heisenberg-, Orthogonale und Unitäre Gruppen).

Für zwei Mannigfaltigkeiten M und N können wir die glatte Abbildungen $F : M \rightarrow N$ betrachten. Wenn $M = \mathbb{R}$ ist (auf äquivalenter Weise wenn M ein Intervall ist), bekamen wir den Begriff von glatten Kurven in N . Für $N = \mathbb{R}$ bekamen wir den Begriff von glatten Funktionen auf M . Wir haben gesehen, dass glatte Funktionen sehr flexible Objekte sind wie die Existenz von glatten Zerlegungen der Eins verdeutlicht.

Ein zentrales Objekt für die Untersuchung einer glatten Mannigfaltigkeit M ist der Tangentialraum T_pM von M im Punkt $p \in M$, ein Vektorraum der selben Dimension wie M . Dieser kann als Raum der Richtungsableitungen erfasst werden und somit als Quotientenraum der durch p laufenden Kurven definiert werden. Mittels der Tangentialräume darf man eine glatte Abbildung um p durch ihr Differential $d_pF : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ linearisieren, sodass $d_pF \cdot v$ die Ableitung von F in Richtung v ist. Der Grundstein der Theorie ist hier die Kettenregel $d_p(G \circ F) = d_{F(p)}G \circ d_pF$, die eine entscheidende Rolle in der ganzen Differentialgeometrie spielt.

Die lokalen Eigenschaften von F um p wurden vom Differential d_pF bestimmt und erlauben uns die Klassen von Immersionen, Submersionen, lokale Diffeomorphismen einzuführen, mit den wir Untermannigfaltigkeiten ganz einfach produzieren können.

Nach der obigen Diskussion stellt sich dann die Frage: Welche Beziehung besteht zwischen zwei verschiedenen Tangentialräumen T_pM und T_qM (außer der Dimension)? Zu diesem Zweck haben wir das Tangentialbündel $TM = \sqcup_{p \in M} T_pM$ betrachtet, wo wir alle Tangentialräume zusammenbinden und die kanonische Projektion $\pi : TM \rightarrow M$ definieren. Wir haben TM die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit gegeben, sodass π eine Submersion ist, und die lineare Struktur auf den Fasern von π über den Karten (U, φ) von M zu der kanonische faserweise lineare Struktur auf $U \times \mathbb{R}^n$ äquivalent ist. Grob gesagt: die Tangentialräume bilden eine Familie von Vektorräumen, die durch die Punkte von M parametrisiert sind und glatt mit dem Punkt variieren.

Diese Intuition haben wir zur Definition von Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ über M verallgemeinert, sodass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, für die ein faserweise

linearer Isomorphismus (eine sogenannte Trivialisierung) $\chi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ existiert. Alle Konstruktionen aus der linearen Algebra können wir faserweise durchführen. Dies führt zu den Begriffen von Rahmen, Bündelhomomorphismus, Unterbündel, Dualbündel, Quotientenbündel, direkte Summe von Bündeln, (schiefsymmetrischem oder symmetrischem) Tensorbündel.

Mit einer Abbildung $F : L \rightarrow M$ können wir ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ zu einem Vektorbündel $\mathcal{P}_F(\pi) : \mathcal{P}_F(E) \rightarrow L$ über L zurückziehen. Die Idee hinter diesem sogenannten Pullback-Bündel ist, dass die von π bestimmte Familie von Vektorräumen, die durch die Punkte von M parametrisiert ist, nun mittels F durch die Punkte von L parametrisiert werden kann. Wenn $L \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und F die Inklusion ist, können wir uns das Pullback-Bündel einfach als die Einschränkung von $\pi : E \rightarrow M$ entlang L vorstellen.

Jedes Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ kommt mit seinem Raum von glatten Schnitten $\Gamma(E)$, die ein $C^\infty(M)$ -Modul ist. In einer Trivialisierung über $U \subset M$ ist ein glatter Schnitt nicht anders als eine glatte Abbildung von U nach \mathbb{R}^k . Daher können wir an einem Schnitt als eine Verallgemeinerung einer glatten Vektorfunktion auf M denken, wobei die Zielmenge mit dem Punkt in Definitionsbereich variiert.¹ Das Verstehen der Räume von Schnitten und der linearen Operatoren zwischen ihnen hat in der Differentialgeometrie und in ihrer Anwendung zur Physik zentrale Bedeutung denn die meisten wichtigen geometrischen Objekte oder physikalischen Größen können als Schnitte eines Vektorbündels aufgefasst werden.

Zum Beispiel sind Vektorfelder X Schnitte des Tangentialbündels TM und 1-Formen (Beispiele davon sind Differentiale von glatten Funktionen) Schnitte des Kotangentialbündels T^*M . Allgemeiner sind Tensorfelder von M des Typs (r, s) die Schnitte des Tensorproduktes von r Kopien von TM und s Kopien von T^*M . Tensorfelder, die nur Potenzen von TM betreffen, heißen kontravariant. Tensorfelder, die nur Potenzen von T^*M betreffen, heißen kovariant. Wir haben dann studiert wie glatte Abbildungen auf Tensorfelder wirken. Für kovarianten Tensorfelder erfolgt das durch den Pullback-Operator. Für kontravariante Tensorfelder besteht eine Wirkung nur in besonderen Fällen (zum Beispiel wenn die Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus ist) und im Allgemeinen sprechen wir über verwandte kontravariante Tensorfelder.

Vektorfelder bestimmen eine Klasse von Kurven γ auf M , deren Tangentialvektor mit X übereinstimmt, d.h. $\dot{\gamma} = X(\gamma)$. Diese sogenannten Integalkurven bleiben stets tangential zu X und führen zum Begriff von Fluß Φ von X , der alle maximalen Integalkurven gleichzeitig betrachtet. Ein vollständiger Fluß (also wenn die maximalen Lösungen für alle Zeiten definiert sind) liefert einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \mapsto \text{Diff}(M)$, $t \mapsto \Phi^t$ und wir können die Variation des Pullbacks von Tensorfeldern bezüglich der Zeit t untersuchen.

¹Wenn wir Abbildungen von M in eine Mannigfaltigkeit N auf ähnlicher Weise verallgemeinern, werden wir zum Begriff von Schnitten eines Faserbündels mit Faser N geführt.

Diese Variation wird durch eine Art Ableitung gemessen, die sogenannte Lie-Ableitung. Wir haben Formeln für die Lie-Ableitung von Funktionen und Vektorfeldern gegeben. In diesem zweiten Fall liefert die Lie-Ableitung ein Produkt auf dem Raum der Vektorfelder, das unter dem Namen Lie-Klammer bekannt ist. Die Lie-Klammer zwischen X und Y misst die lokale (und globale wenn die Flüsse vollständig sind) Kommutativität der Flüsse von X und Y . Daher verschwinden die Lie-Klammern von Koordinatenvektorfeldern immer. Andersrum besagt das Integrabilitätskriterium von Frobenius, dass wenn die Lie-Klammern von linear unabhängigen Vektorfeldern verschwindet, diese lokal Koordinatenvektorfelder sind.

Wenn die Schnitte eines Vektorbündels eine Verallgemeinerung von Funktionen sind, was ist die Verallgemeinerung des Differential von Funktionen? Anders gesagt, wie können wir die Richtungsableitungen eines Schnittes nehmen? Diese Arbeit macht die kovariante Ableitung $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ für uns. Kovariante Ableitungen existieren für alle Vektorbündel aber sie sind nicht eindeutig. Diese sind lokale Operatoren und in einer Trivialisierung lassen sie sich als $\nabla = d + \omega$ schreiben, wobei ω eine Matrix von 1-Formen ist. Wir haben gesehen, dass eine kovariante Ableitung auf E (bzw. auf E_1 und E_2) eindeutig kovariante Ableitungen auf dem Pullback-Bündel $\mathcal{P}_F(E)$ und auf dem Dualbündel E^* (bzw. auf der direkten Summe $E_1 \oplus E_2$ und auf dem Tensorprodukt $E_1 \otimes E_2$) induziert. Wir haben kovariante Ableitungen auf TM betrachtet und dort die Torsion $\tau \in \Gamma(\Lambda^2 M \otimes TM)$, die die Differenz zwischen der Antisymmetrisierung von ∇ und der Lie-Klammer misst, eingeführt. Wenn die Torsion verschwindet sagen wir, dass ∇ symmetrisch ist.

Auf zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten sind konstante Funktionen genau diejenige Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit verschwindendem Differential $df = 0$. Wir haben also ∇ -parallele Schnitte als die Elemente $\sigma \in \Gamma(E)$ mit $\nabla\sigma = 0$ definiert. Wenn M ein Intervall ist haben wir gesehen, dass für alle $p \in M$ die Evaluation $\sigma \mapsto \sigma(p)$ ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraum der ∇ -parallelen Schnitten und der Faser E_p liefert. Die Verkettung von diesen Isomorphismen für zwei Punkten $p, p' \in M$ liefert die Parallelverschiebung $E_p \rightarrow E_{p'}$ zwischen den Fasern. Die Parallelverschiebungen zwischen allen Paaren von Punkten in M bestimmen die kovariante Ableitung ∇ eindeutig.

Wenn M höhere Dimension besitzt, ist die Situation komplizierter. Durch den Pullback der kovarianten Ableitung auf Kurven in M können wir erst Schnitte konstruieren, die parallel entlang Kurven sind. Das Hindernis diese parallele Schnitte entlang Kurven auf parallele Schnitte auf höhere dimensionale Untermannigfaltigkeiten von M fortzusetzen wird durch das Krümmungstensorfeld $R \in \Gamma(\Lambda^2 M \otimes \text{End}(E))$ gegeben, welches sich mit Hilfe des äußeren Differential von 1-Formen in einer Trivialisierung schreiben lässt. Das Tensorfeld R verschwindet um $p \in M$ genau dann, wenn ∇ flach um p ist, d.h. wenn ein ∇ -paralleler Rahmen um p existiert. Allgemeiner misst R , wie sehr die Parallelverschiebung entlang einer kleinen geschlossenen Kurve von der Identität abweicht. Nach dem Frobenius-Kriterium ist eine symmetrische kovariante Ableitung auf TM flach um p genau dann, wenn eine Karte um p mit ∇ -parallelen Koordinatenvektorfeldern existiert.

1.2 Wohin gehen wir?

Im Modul Differentialgeometrie II wollen wir

- (a) die Geometrie von Mannigfaltigkeiten mit Hilfe der in Differentialgeometrie I entwickelten Instrumente studieren;
- (b) die Wechselbeziehungen zwischen der Geometrie und der Topologie solcher Räumen vertiefen.

Unter Geometrie verstehen wir hauptsächlich die Untersuchung von metrischen Größen wie dem Abstand zwischen Punkten oder der Länge von Kurven. Eine Möglichkeit ist, die Geometrie durch eine sogenannte Riemannsche Metrik zu bestimmen, d.h. ein glattes Feld von Skalarprodukten auf den Tangentialräumen der Punkten der Mannigfaltigkeit. Die Länge von Tangentialvektoren, (die als infinitesimale Kurven gedacht werden können) wird durch die mit dem Skalarprodukt assoziierte Norm (das sogenannte Linienelement ds) gemessen. Die Länge einer Kurve wird dann durch das Integrieren des Linienelements erhalten und den Abstand zwischen zwei Punkten als das Infimum der Länge aller Kurven die die Punkte verbinden.

Wie schon Riemann bemerkt hatte, kann man auch allgemein die obige Konstruktion mit Hilfe eines glatten Feldes von Normen durchführen, die nicht unbedingt von einem Skalarprodukt kommen:

Für den Raum wird, wenn man die Lage der Punkte durch rechtwinklige Coordinaten ausdrückt, $ds = \sqrt{\sum(dx)^2}$; der Raum ist also unter diesem einfachsten Falle [dem Fall einer Riemannschen Metrik] enthalten. Der nächst einfache Fall würde wohl die Mannigfaltigkeiten umfassen, in welchen sich das Linienelement durch die vierte Wurzel aus einem Differentialausdrucke vierten Grades ausdrücken lässt. Die Untersuchung dieser allgemeinen Gattung würde zwar keine wesentlich andere Principien erfordern, aber ziemlich zeitraubend sein und verhältnissmässig auf die Lehre vom Raume wenig neues Licht werfen, zumal da sich die Resultate nicht geometrisch ausdrücken lassen; ich beschränke mich daher auf die Mannigfaltigkeiten, wo das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades ausgedrückt wird.

Bernhard Riemann

Der von Riemann beiseitegeschobene Fall spielt heutzutage eine zentrale Rolle in der Differentialgeometrie und wird als Finsler Geometrie bekannt, wobei man ein glattes Feld von Minkowski-Normen² betrachtet. Zum Beispiel stellt diese Geometrie ein Modell für alle Fälle dar, in denen der Abstand von p nach q und der Abstand von q nach p nicht die gleichen sind: wenn es ein Wind oder eine Steigung gibt, ist klar, dass die Zeit (unser Abstand in diesem Fall), die wir brauchen, von p nach q zu laufen, anders als die Zeit von q nach p sein könnte.

²Für Minkowski-Normen muss zusätzlich der Rand des Balles glatt und strikt konvex sein aber die Homogenität wird zu positiv Homogenität, nämlich $|\lambda v| = \lambda|v|$ für alle $\lambda > 0$, geschwächt.

In diesem Modul werden wir uns ausschließlich mit der Riemannschen Geometrie befassen. In diesem Fall verfügt man zusätzlich über den Begriff von Winkel zwischen Tangentialrichtungen und insbesondere von Orthogonalität. Das hat viele Vorteile. Dann sind metrische und Winkeleigenschaften mit einander verbunden. Zum Beispiel:

- Der Kosinussatz der euklidischen Geometrie besagt, dass $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ für die Seitenlängen eines Dreiecks gilt, wobei θ der von a und b eingeschlossene Winkel ist. In der Riemannschen Geometrie wird das zu Vergleichssätzen für geodätische Dreiecke führen.
- Der Sinussatz der euklidischen Geometrie besagt, dass der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Seitenlänge a und b gleich $ab \sin \theta$ ist, wobei θ der von a und b eingeschlossene Winkel ist. In der Riemannschen Geometrie wird das zu einer kanonischen Definition des Volumen von Untermannigfaltigkeiten führen.
- Der kürzeste Weg zwischen einem Punkt und einer Hyperebene (zum Beispiel, eine Gerade im \mathbb{R}^2 oder eine Ebene im \mathbb{R}^3) steht senkrecht zur Hyperebene. In der Riemannschen Geometrie steht entsprechend der kürzeste Weg zwischen disjunkten Untermannigfaltigkeiten senkrecht zu beiden.

Schon Riemann stellte die Frage, wann zwei Riemannschen Mannigfaltigkeit lokal gleich (isometrisch) sind. Direkt nach dem Abschnitt, den wir oben zitiert haben, bemerkte er:

Man kann einen solchen Ausdruck in einen andern ähnlichen transformieren, indem man für die n unabhängigen Veränderlichen Functionen von n neuen unabhängigen Veränderlichen setzt. Auf diesem Wege wird man aber nicht jeden Ausdruck in jeden transformieren können; den der Ausdruck enthält $n \frac{n+1}{2}$ Coefficienten, welche willkürliche Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind; durch Einführung neuer Veränderlicher wird man aber nur n Relationen genügen und also nur n der Coefficienten gegebenen Grössen gleich machen können. Es sind dann die übrigen $n \frac{n-1}{2}$ durch die Natur der darzustellenden Mannigfaltigkeit schon völlig bestimmt, und zur Bestimmung ihrer Massverhältnisse also $n \frac{n-1}{2}$ Functionen des Orts erforderlich. Die Mannigfaltigkeiten, in welchen sich, wie in der Ebene und im Raume, das Linienelement auf die Form $\sqrt{\sum dx^2}$ bringen lässt, bilden daher nur einen besondern Fall der hier zu untersuchenden Mannigfaltigkeiten.

Bernhard Riemann

Die übrigen $n \frac{n-1}{2}$ Koeffizienten, die die Natur der Riemannschen Metrik lokal bestimmen werden von Riemann als Krümmung bezeichnet. Um die wichtigen Informationen aus so vielen Zahlen auszupacken, betrachtet man dann die durchschnittliche Krümmung in jede Tangentialrichtung, die sogenannte Ricci-Krümmung (n Koeffizienten), oder an jedem Punkt, die sogenannte Skalar Krümmung (ein Koeffizient).

Im Laufe der Zeit stellte man aber fest, dass die Krümmung auch die globalen metrischen (zum Beispiel das Durchmesser) oder topologischen Eigenschaften (zum Beispiel Homöomorphismusklasse) der Mannigfaltigkeit stark beeinflusst, falls die aus der Riemannschen Metrik entstehende Abstandsfunktion vollständig ist.

Einerseits lässt jede Mannigfaltigkeit eine Fülle von verschiedenen Riemannschen Metriken zu. Andererseits tragen nur einige Mannigfaltigkeiten eine Metrik, deren Krümmung bestimmten Eigenschaften genügt. Also spielen hier Flexibilität und Starrheit gegeneinander. Ziel dieses Moduls ist hauptsächlich die Starrheit zu diskutieren und die folgenden Resultate zu beweisen.

Satz (Gauß-Bonnet). *Es sei M eine orientierte Fläche mit Rand ∂M und Ecken E . Dann gilt für alle Riemannsche Metriken auf M :*

$$2\pi\chi(M) = \int_M K dA + \int_{\partial M} \kappa ds + \sum_{e \in E} \alpha_e,$$

wobei $\chi(M)$ die Euler-Charakteristik von M , K die Krümmung, dA das Volumenelement, κ die geodätische Krümmung des Randes, ds das Linienelement und α_e der Außenwinkel an $e \in E$ bezeichnen.

Folgerung. *Zwei einfach geschlossene Geodätische auf einer positiven gekrümmten S^2 schneiden sich. Alle einfach geschlossenen Geodätischen auf einer nicht positiv gekrümmten kompakten Fläche ohne Rand sind nicht zusammenziehbar.*

Satz (Cartan-Hadamard). *Es sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, die eine vollständige Metrik mit nicht positiver Krümmung trägt. Dann ist M diffeomorph zu $\mathbb{R}^{\dim M}$.*

Folgerung. *Für jedes $n \geq 2$ und jede Mannigfaltigkeit N lässt $M = S^n \times N$ keine vollständige Metrik nicht positiver Krümmung zu.*

Satz (Preissman). *Es sei M eine Mannigfaltigkeit, die eine vollständige Metrik negativer Krümmung trägt. Dann ist jede nicht triviale abelsche Untergruppe der Fundamentalgruppe isomorph zu \mathbb{Z} .*

Satz (Bonnet-Myers). *Es sei M eine Mannigfaltigkeit, die eine vollständige Metrik mit Ricci-Krümmung größer als eine positive Konstante trägt. Dann ist M kompakt und hat endliche Fundamentalgruppe.*

Folgerung. *Der Torus trägt keine vollständige Metrik mit negativer Krümmung und keine mit positiver Ricci-Krümmung.*

Satz (Sphärensatz). *Es sei M eine Mannigfaltigkeit, die eine vollständige Metrik mit Krümmung K im Intervall $(\delta/4, \delta]$ für ein $\delta > 0$ besitzt. Dann ist M homöomorph zu $S^{\dim M}$.*

Zum Schluss wollen wir bemerken, dass nicht alle Krümmungseigenschaften starr sind, wie das folgende Resultat, das wir in diesem Modul nicht betrachten, zeigt.

Satz (Lohkamp). *Jede Mannigfaltigkeit M mit $\dim M \geq 3$ trägt eine vollständige Metrik, deren Ricci-Krümmung kleiner als eine negative Konstante ist.*

Notation

Wenn nichts anders explizit gesagt wird, sind in diesem Skript:

- alle topologische Räume Hausdorffsch und mit abzählbarer Basis;
- alle Mannigfaltigkeiten und Abbildung glatt;
- alle Mannigfaltigkeiten nicht-leer und zusammenhängend.

2 Von Euklidischer bis zur Riemannschen Geometrie

2.1 Euklidische Norm und Abstand

In der euklidischen Geometrie des Raums wird der Abstand zwischen zwei Punkten durch die euklidische Norm des Differenzvektors gemessen:

$$d_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad d_{\mathbb{R}^n}(p, q) := |p - q|_{\text{euk}}, \quad (2.1)$$

wobei die euklidische Norm durch den Satz von Pythagoras definiert wird:

$$|\cdot|_{\text{euk}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad |v|_{\text{euk}} := \sqrt{\sum_{i=1}^n (v^i)^2}.$$

Was wir bekommen, ist eine Abstandsfunktion im Sinne der Analysis II. Das heißt: für alle $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ gilt

Punkt-trennung: $d_{\mathbb{R}^n}(p, q) = 0$ genau dann, wenn $p = q$;

Symmetrie: $d_{\mathbb{R}^n}(p, q) = d_{\mathbb{R}^n}(q, p)$;

3-Ecksungleichung: $d_{\mathbb{R}^n}(p, r) \leq d_{\mathbb{R}^n}(p, q) + d_{\mathbb{R}^n}(q, r)$.

Wir können dazu die Tripel von Punkten charakterisieren, wobei die Gleichheit gilt:

Kollinearität: $d_{\mathbb{R}^n}(p, r) = d_{\mathbb{R}^n}(p, q) + d_{\mathbb{R}^n}(q, r)$ genau dann, wenn q auf dem Geradenstück zwischen p und r liegt: $q = (1 - t)p + tr$ für $t \in [0, 1]$.

Bemerkung 2.1. Wenn $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^n ist, ist dann $d(p, q) := |p - q|$ auch eine Abstandsfunktion. Die Kollinearitätseigenschaft gilt genau dann, wenn die Implikation

$$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, |v_1 + v_2| = |v_1| + |v_2| \implies \exists \lambda > 0, v_2 = \lambda \cdot v_1 \quad (2.2)$$

stimmt. Normen sind in Bijektion mit konvexen Körpern, d.h. kompakten, symmetrischen, konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n mit 0 in ihrem Inneren. Symmetrisch heißt, dass

$$v \in K \iff -v \in K, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Konvex heißt, dass

$$(1-t)v_1 + tv_2 \in K, \quad \forall v_1, v_2 \in K, t \in [0, 1].$$

Die Bijektion assoziiert zu $|\cdot|$ ihren abgeschlossenen Einheitsball $K_{|\cdot|} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq 1\}$ und umgekehrt zu K die Norm $v \mapsto |v|_K := \inf\{r > 0 \mid v \in r \cdot K\}$. Normen, die (2.2) erfüllen, sind in Bijektion mit *strikt* konvexen Körpern. Das heißt:

$$(1-t)v_1 + tv_2 \in \overset{\circ}{K}, \quad \forall v_1, v_2 \in K, t \in (0, 1).$$

Was wir im nächsten Abschnitt zeigen, gilt für allgemeine Normen und nicht nur für die euklidische Norm $|\cdot|_{\text{euk}}$. \triangle

2.2 Kurven im \mathbb{R}^n und euklidische Länge

Die euklidische Norm kann benutzt werden, um die Länge von Kurven in \mathbb{R}^n zu definieren. Wir fangen an, die Klasse von Kurven, mit der wir arbeiten, zu konstruieren.

Definition 2.2. Es seien $\gamma_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei stetige verkettbare Kurven, das heißt $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_1)$. Die Verkettung $\gamma_1 * \gamma_2 : [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die stetige Kurve

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{falls } t \in [t_0, t_1], \\ \gamma_2(t) & \text{falls } t \in [t_1, t_2]. \end{cases} \quad \triangle$$

Definition 2.3. Ein Geradenstück zwischen p und q in \mathbb{R}^n parametrisiert im Intervall $[t_0, t_1]$ ist die Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = p + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}(q-p)$ für $t \in [t_0, t_1]$. Ein Streckenzug ist eine Kurve γ , die als Verkettung von endlich vielen Geradenstücken zwischen Punkten p_0, \dots, p_k (sogenannten Knoten), darstellbar ist. Ihre Länge ist gegeben als

$$L_{\text{euk}}(\gamma) := \sum_{h=1}^k d_{\mathbb{R}^n}(p_{h-1}, p_h). \quad \triangle$$

Definition 2.4. Eine Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt glatt, wenn es $\tilde{\gamma} : (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt mit $\tilde{t}_0 < t_0 < t_1 < \tilde{t}_1$ existiert, sodass $\gamma = \tilde{\gamma}|_{[t_0, t_1]}$. Eine Kurve γ heißt stückweise glatt, wenn die Verkettung von endlich vielen glatten Kurven ist. Wir schreiben $C_{\text{stück}}^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ für die Klasse der stückweise glatten Kurven parametrisiert im Intervall $[t_0, t_1]$. Wir benutzen die Notation $C_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ für die Kurven $\gamma \in C_{\text{stück}}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. \triangle

Bemerkung 2.5. Im Vergleich mit glatten Kurven haben stückweise glatte Kurven den Vorteil, dass sie geschlossen unter Verkettung ist, was wir ganz oft benutzen werden. \triangle

Nach unserer Definition ist eine Kurve γ eine Abbildung von einem Intervall $[t_0, t_1]$ mit Bild im \mathbb{R}^n . Trotzdem sind wir oft an Eigenschaften von Kurven interessiert, die nur von der geometrischen Spur $\gamma([t_0, t_1])$ abhängig sind und nicht von der Parametrisierung γ . Wir geben daher die folgende Definition.

Definition 2.6. Wir sagen, dass $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\delta : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ äquivalent sind, wenn es einen stückweise glatten Diffeomorphismus $\tau : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$ mit der Eigenschaft $\delta = \gamma \circ \tau$ gibt:

$$\begin{array}{ccc} [t_0, t_1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow \tau & \nearrow \delta & \\ [s_0, s_1] & & \end{array}$$

Die Abbildung τ heißt Umparametrisierung. Wir sagen, dass τ orientierungserhaltende (bzw. orientierungsumkehrend) ist, wenn τ monoton steigend (bzw. fallend) ist. Jede Äquivalenzklasse von Kurven nach der obigen Relation heißt geometrische Kurve. Wenn wir nur orientierungserhaltende Umparametrisierungen in der Äquivalenz zulassen, heißen die Äquivalenzklassen orientierte geometrische Kurven. \triangle

Beispiel 2.7. Wir geben zwei Parametrisierungen des oberen Kreisbogens in $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ zwischen den Geraden $\{x = x_-\}$ und $x = x_+$ mit $-1 < x_- < x_+ < 1$. Einmal $\gamma : [x_-, x_+] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ und einmal $\delta : [\theta_+, \theta_-] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\delta(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Dann haben wir die orientierungsumkehrende Umparametrisierung $\tau : [\theta_+, \theta_-] \rightarrow [x_-, x_+]$ mit $\tau(\theta) = \cos \theta$. \triangle

Wir können jede stückweise glatte Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch Streckenzüge approximieren. Für jede Zerteilung $\sigma = \{t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = t_1\}$ nehmen wir den Streckenzug γ^σ parametrisiert im Intervall $[t_0, t_1]$, die durch $\gamma(s_h)$ zur Zeit s_h läuft. Dann

$$L_{\text{euk}}(\gamma^\sigma) = \sum_{h=1}^k d_{\mathbb{R}^n}(\gamma(s_{h-1}), \gamma(s_h)) = \sum_{h=1}^k \left| \frac{\gamma(s_h) - \gamma(s_{h-1})}{s_h - s_{h-1}} \right|_{\text{euk}} \cdot (s_h - s_{h-1})$$

Wenn die Feinheit $Z(\sigma)$ der Zerlegung nach Null geht, dann ist

$$\left| \frac{\gamma(s_h) - \gamma(s_{h-1})}{s_h - s_{h-1}} \right|_{\text{euk}} \sim |\dot{\gamma}(s_h)|_{\text{euk}}$$

und wir bekommen als Limes das Integral

$$\lim_{Z(\sigma) \rightarrow 0} L_{\text{euk}}(\gamma^\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}(t)|_{\text{euk}} dt.$$

Definition 2.8. Die euklidische Länge einer stückweise glatten Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist

$$L_{\text{euk}}(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}(t)|_{\text{euk}} dt. \quad \triangle$$

Satz 2.9. Die Länge ist verkettungsadditiv und unabhängig von der Parametrisierung:

- Für alle verkettbaren Kurven γ_1 und γ_2 gilt $L_{\text{euk}}(\gamma_1 * \gamma_2) = L_{\text{euk}}(\gamma_1) + L_{\text{euk}}(\gamma_2)$.

- Es gilt $L_{\text{euk}}(\gamma \circ \tau) = L_{\text{euk}}(\gamma)$ für jede Kurve γ und jede Umparametrisierung τ .

Beweis. Die Additivität der Länge folgt aus der Additivität des Integrals. Es seien nun $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tau : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$. Nach der Verkettungsadditivität dürfen wir annehmen, dass δ und γ glatt sind. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d(\gamma \circ \tau)}{ds}(s) = \frac{d\tau}{ds}(s) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(\tau(s)).$$

Da die euklidische Norm 1-homogen ist, bekommen wir

$$\left| \frac{d(\gamma \circ \tau)}{ds}(s) \right|_{\text{euk}} = \left| \frac{d\tau}{ds}(s) \right| \cdot \left| \frac{d\gamma}{dt}(\tau(s)) \right|_{\text{euk}}.$$

Nach der Substitutionsregel für Integrale mit $t = \tau(s)$ gilt

$$L_{\text{euk}}(\gamma \circ \tau) = \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{d\tau}{ds}(s) \right| \cdot \left| \frac{d\gamma}{dt}(\tau(s)) \right|_{\text{euk}} ds = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right|_{\text{euk}} dt = L_{\text{euk}}(\gamma). \quad \square$$

Wir können nun zeigen, dass sich die Abstandsfunktion zwischen zwei Punkten als die Länge des kürzesten Weges, der die zwei Punkte verbindet, ausdrücken lässt. Dieses Resultat wird als Motivation für die Definition der Abstandsfunktionen auf Mannigfaltigkeiten dienen.

Satz 2.10. Für alle $p, q \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$d_{\mathbb{R}^n}(p, q) = \inf_{\gamma \in C_{p,q}(\mathbb{R}^n)} L_{\text{euk}}(\gamma).$$

Es sei $\gamma \in C_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ minimierend, d.h. $L_{\text{euk}}(\gamma) = d_{\mathbb{R}^n}(p, q)$. Dann ist γ das Geradenstück zwischen p und q (bis auf Umparametrisierung).

Beweis. Wenn γ das Geradenstück zwischen p und q gilt $L_{\text{euk}}(\gamma) = d_{\mathbb{R}^n}(p, q)$ nach Definition. Es sei nun $\gamma \in C_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Dann für jede Zerlegung σ von $[0, 1]$ gilt nach der 3-Ecksungleichung:

$$L_{\text{euk}}(\gamma^\sigma) = \sum_{h=1}^k d_{\mathbb{R}^n}(\gamma(s_{h-1}), \gamma(s_h)) \geq d_{\mathbb{R}^n}(p, q).$$

Wenn die Feinheit $Z(\sigma)$ von σ gegen null geht, bekommen wir also $L_{\text{euk}}(\gamma) \geq d_{\mathbb{R}^n}(p, q)$. Wenn γ minimierend ist, dann gilt für alle $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(p, q) = L_{\text{euk}}(\gamma) &= L_{\text{euk}}(\gamma|_{[0,t]} * \gamma|_{[t,1]}) = L_{\text{euk}}(\gamma|_{[0,t]}) + L_{\text{euk}}(\gamma|_{[t,1]}) \\ &\geq d_{\mathbb{R}^n}(p, \gamma(t)) + d_{\mathbb{R}^n}(\gamma(t), q). \end{aligned}$$

Nach der 3-Ecksungleichung und der Kollinearität schließen wir daraus, dass $\gamma(t)$ auf dem Geradenstück zwischen p und q liegen muss und dass $L_{\text{euk}}(\gamma|_{[t,1]}) = d_{\mathbb{R}^n}(\gamma(t), q)$. Insbesondere ist $\gamma|_{[t,1]}$ minimierend zwischen $\gamma(t)$ und q . Wir leiten aus dem obigen Argument ab, dass für alle $t' \in [t, 1]$ $\gamma(t')$ auf dem Geradenstück zwischen $\gamma(t)$ und q liegt. Also ist γ eine Umparametrisierung des Geradenstücks zwischen p und q . \square

Wir wollen nun uns mit der Frage beschäftigen, was passiert wenn wir die obige Konstruktion auf eine offene Region von \mathbb{R}^n einschränken. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende, nicht leere, offene Teilmenge. Wir definieren den Abstand als die euklidische Länge des kürzesten Wegs:

$$d_U : U \times U \rightarrow [0, \infty], \quad d_U(p, q) := \inf_{\gamma \in C_{p,q}(U)} L_{\text{euk}}(\gamma).$$

Es wird aus dem allgemeinen Satz 2.21 für Mannigfaltigkeiten folgen, dass d_U tatsächlich eine Abstandsfunktion ist, die die euklidische Topologie auf U induziert. Hier bemerken wir nur, dass die Punkttrennung aus der Ungleichung

$$d_U \geq d_{\mathbb{R}^n}|_{U \times U} \quad (2.3)$$

stammt während die Aussage über die Topologie aus der folgenden Tatsache stammt: wenn $B_r(p)$ ein offener euklidischer Ball um $p \in U$ mit $B_r(p) \subset U$ ist, ist $B_r(p)$ auch der offene Ball um p mit Radius r bezüglich d_U .

Was wir im letzten Teil dieses Abschnittes untersuchen möchten, ist ob minimierende Kurven für d_U existieren, eine Frage, die auch auf Mannigfaltigkeiten von zentraler Bedeutung sein wird. Wenn das Geradenstück zwischen p und q in U enthalten ist, sehen wir aus (2.3) und Satz 2.10, dass dieses Geradenstück die minimierende Kurve ist. Insbesondere gilt $d_U = d_{\mathbb{R}^n}|_{U \times U}$, wenn U konvex ist (die Umkehrung gilt nicht wie der Fall $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zeigt). Im folgenden Satz sehen wir, dass andersherum minimierende Kurven für U Geradenstücke sein müssen. Der Beweis berührt auf der Tatsache, dass jeder Punkt eine Basis von konvexen Umgebungen (die Bälle) besitzt.

Satz 2.11. *Es seien $p, q \in U$ und $\gamma \in C_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Wenn $d_U(p, q) = L_{\text{euk}}(\gamma)$ gilt, dann ist γ das Geradenstück zwischen p und q .*

Proof. Wir zeigen zuerst, dass γ ein Streckenzug ist. Da $\gamma([0, 1])$ eine kompakte Teilmenge der offenen Menge U ist, gibt es eine Zerlegung $\sigma = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1\}$ von $[0, 1]$ und offene euklidische Bällen B_1, B_2, \dots, B_k in U mit gewissen Radien und Mittelpunkten, sodass

$$\gamma(s_{i-1}), \gamma(s_i) \in B_i, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Wenn wir Satz 2.10 mit $p = \gamma(s_{i-1})$ und $q = \gamma(s_i)$ für alle i anwenden, sehen wir, dass der Streckenzug γ^σ nicht länger als γ ist: $L_{\text{euk}}(\gamma^\sigma) \leq L_{\text{euk}}(\gamma)$. Da jede B_i konvex ist, ist γ^σ in U enthalten und $L_{\text{euk}}(\gamma^\sigma) = L_{\text{euk}}(\gamma)$ denn γ ist minimierend. Nach Satz 2.10 gilt $\gamma = \gamma^\sigma$. Wir zeigen nun, dass γ eigentlich ein Geradenstück ist. Es seien p, p', p'' aufeinanderfolgende Knoten des Streckenzugs γ mit $\gamma(t') = p'$ für $t' \in [0, 1]$. Es sei B ein offener euklidischer Ball in U , der p' enthält. Es existieren $t < t'$ und $t'' > t'$ mit $\gamma(t), \gamma(t'') \in B$. Es sei δ das Geradenstück zwischen $\gamma(t)$ und $\gamma(t'')$. Dann

$$L_{\text{euk}}(\gamma) \geq L_{\text{euk}}(\gamma|_{[0,t]} * \delta * \gamma|_{[t'',1]})$$

Das ist eigentlich eine Gleichheit denn γ ist minimierend. Also sind $\gamma(t), \gamma(t'), \gamma(t'')$ und daher p, p', p'' kollinear. \square

2.3 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Offene Teilmengen des \mathbb{R}^n sind die einfachsten Beispiele von Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raums. Wir erinnern uns, dass $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist, wenn sie eine glatte Struktur besitzt, sodass die Inklusion $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung ist. Also können wir die Länge einer stückweise glatte Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ definieren, als die euklidische Länge der Verkettung $\iota \circ \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Statt jede Kurve γ in M durch ι nach vorne zu schieben und dann die euklidische Länge zu berechnen, scheint es ökonomischer zu sein, die euklidische Norm durch ι auf M ein für allemal zurückzuziehen. Zu diesem Zweck bemerken wir, dass $|v|_{\text{euk}} = \sqrt{g_{\text{euk}}(v, v)}$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, wobei

$$g_{\text{euk}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{\text{euk}}(u, v) := \sum_{i=1}^n u^i \cdot v^i$$

das euklidische Skalarprodukt ist.

Definition 2.12. Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Das heißt:

- (a) g ist bilinear;
- (b) $g(u, v) = g(v, u)$ für alle $u, v \in V$;
- (c) $g(v, v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

Die Funktion

$$|\cdot|_g : V \rightarrow [0, \infty), \quad |v|_g = \sqrt{g(v, v)}, \quad \forall v \in V$$

ist die zu g assoziierte Norm. Der unorientierte Winkel $\theta \in [0, \pi]$, der von $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ eingeschlossen ist, wird durch die Formel

$$\cos \theta = \frac{g(v_1, v_2)}{|v_1|_g |v_2|_g}$$

definiert. △

Beispiel 2.13. Das Frobenius-Skalarprodukt g_{Frob} ist definiert als

$$g_{\text{Frob}} : \mathfrak{gl}_n \mathbb{R} \times \mathfrak{gl}_n \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{\text{Frob}}(A, B) := \text{Spur}(A^T \cdot B). \quad \triangle$$

Bemerkung 2.14. Für jede lineare Abbildung $F : W \rightarrow V$ ist

$$F^*g : W \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad F^*g(w_1, w_2) = g(F \cdot w_1, F \cdot w_2)$$

bilinear und symmetrisch. Die Funktion F^*g ist ein Skalarprodukt genau dann, wenn F injektiv ist. Insbesondere ist die Einschränkung von g auf einem Untervektorraum $W \subset V$ ein Skalarprodukt auf W . △

Wir können dann die euklidische Länge von $\iota \circ \gamma$ folgenderweise umschreiben:

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(\iota \circ \gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\text{euk}}\left(d_{\gamma(t)}\iota \cdot \dot{\gamma}(t), d_{\gamma(t)}\iota \cdot \dot{\gamma}(t)\right)} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(d_{\gamma(t)}\iota)^* g_{\text{euk}}}\left(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right) dt. \end{aligned}$$

Hier ist $d_p\iota : T_pM \rightarrow T_{\iota(p)}\mathbb{R}^n$ und g_{euk} ist als Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n \cong T_{\iota(p)}\mathbb{R}^n$ betrachtet. Mit der Identifikation $T_q\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ für jedes $q \in \mathbb{R}^n$ ist g_{euk} ein Schnitt von $T^*\mathbb{R}^n \otimes T^*\mathbb{R}^n$ (also ein Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$), der auf jedem $T_q\mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt ist. Nach der Definition des Pullbacks von kovarianten Tensorfelder folgt es, dass $(d_p\iota)^* g_{\text{euk}} = (\iota^* g_{\text{euk}})_p$, wobei $\iota^* g_{\text{euk}}$ ein Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$ auf M ist. Die Injektivität von $d_p\iota$ impliziert, dass $(\iota^* g_{\text{euk}})_p$ ein Skalarprodukt auf T_pM ist. Daher bekommen wir

$$L_{\text{euk}}(\iota \circ \gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}(t)|_{(\iota^* g_{\text{euk}})_{\gamma(t)}} dt.$$

Wir haben dann die folgende Definition begründet.

Definition 2.15. Eine Riemannsche Metrik g auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$ (also ein Schnitt von $T^*M \otimes T^*M$), sodass g_p ein Skalarprodukt auf T_pM für alle $p \in M$ ist. Wir schreiben $|\cdot|_g : TM \rightarrow [0, \infty)$ für die dazugehörige Norm auf dem Tangentialraum. Das Paar (M, g) heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit. \triangle

Bemerkung 2.16. Die Funktion $TM \rightarrow [0, \infty)$, $v \mapsto g(v, v)$ ist glatt denn sie ist die Verkettung der glatten Funktionen $TM \rightarrow TM \otimes TM$, $v \mapsto v \otimes v$ und $g : TM \otimes TM \rightarrow \mathbb{R}$. Daher ist die Norm $TM \rightarrow [0, \infty)$, $v \mapsto |v|_g = \sqrt{g(v, v)}$ eine stetige Funktion, die glatt außerhalb des Nullschnitts von TM (die Nullstelle der Funktion $v \mapsto g(v, v)$) ist. \triangle

Beispiel 2.17. Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Jede Immersion $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ liefert eine Riemannsche Metrik $\iota^* g_{\text{euk}}$ auf M . Allgemeiner liefert jede Immersion $F : M \rightarrow N$ in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (N, h) eine Riemannsche Metrik F^*h auf M . \triangle

Die Definitionen 2.4 und 2.6 von stückweise glatten Kurven und Umparametrisierungen lassen sich auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Hier machen wir nur eine Zugabe.

Definition 2.18. Es sei $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ stückweise glatt und sei $T \subset [t_0, t_1]$ die endliche Menge der Extrempunkte der Verkettungsintervalle. Für alle $t \in [t_0, t_1] \setminus T$ heißt $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ der Geschwindigkeitsvektor von γ . Für $t \in T$ haben wir den Linksgeschwindigkeitsvektor den Rechtsgeschwindigkeitsvektor

$$\dot{\gamma}^-(t) = \lim_{t' \downarrow t} \dot{\gamma}(t'), \quad \dot{\gamma}^+(t) = \lim_{t' \uparrow t} \dot{\gamma}(t'). \quad \triangle$$

Auf ähnlicher Weise erweitern wir die Definition 2.8 von Länge auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Definition 2.19. Es sei $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine stückweise glatte Kurve auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Die Funktion $|\dot{\gamma}|_g : [t_0, t_1] \rightarrow [0, +\infty)$ heißt Geschwindigkeit von γ . Die Länge von γ ist das Integral der Geschwindigkeit

$$L_g(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}(t)|_g dt. \quad \triangle$$

Wenn wir den Beweis von Satz 2.9 nachahmen, sehen wir, dass auch die Länge L_g verkettungsadditiv und invariant nach Umparametrisierungen ist.

Definition 2.20. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Riemannsche Abstand $d_g : M \times M \rightarrow [0, \infty]$ ist definiert als

$$d_g(p, q) := \inf_{\gamma \in C_{p,q}(M)} L_g(\gamma). \quad \triangle$$

Für $p \in M$ und $r > 0$ definieren wir die offenen metrischen Bällen

$$B_r^g(p) := \{q \in M \mid d_g(p, q) < r\}.$$

Satz 2.21. *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Riemannsche Abstand d_g ist eine Abstandsfunktion, die die Topologie von M induziert.*

Anfang des Beweises. Wir zeigen zuerst, dass d_g endlich ist. Wir sagen, dass zwei Punkte auf M äquivalent sind, wenn es $C_{p,q}(M)$ nicht leer ist. Das ist eine Äquivalenzrelation:

Reflexivität: die konstante Kurve gehört zu $C_{p,p}(M)$;

Symmetrie: Es sei $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ der orientierungsumkehrende Diffeomorphismus $\varphi(t) = 1 - t$. Dann haben wir eine Bijektion

$$C_{p,q}(M) \rightarrow C_{q,p}(M), \quad \gamma \mapsto \gamma \circ \varphi.$$

Transitivität: Es seien $\varphi_1 : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$ und $\varphi_2 : [1/2, 1] \rightarrow [0, 1]$ die orientierungserhaltenden Umparametrisierungen $\varphi_1(t) = 2t$ und $\varphi_2(t) = 2t - 1$. Wir haben eine Verkettungsabbildung

$$C_{p,q}(M) \times C_{q,r}(M) \rightarrow C_{p,r}(M), \quad (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto (\gamma_1 \circ \varphi_1) * (\gamma_2 \circ \varphi_2)$$

Jede Äquivalenzklasse ist offen in M , weil jedes $p \in M$ eine Umgebung diffeomorph zu einem euklidischen Ball besitzt, wo je zwei Punkte durch eine glatte Kurve verbunden werden können. Da M zusammenhängend ist, sind je zwei Punkte äquivalenten und daher ist d_g endlich.

Die Gleichung $d_g(p, p) = 0$ folgt aus der Tatsache, dass die konstante Kurve in p Länge null besitzt.

Die Symmetrie von d_g folgt aus der Bijektion $C_{p,q}(M) \rightarrow C_{q,p}(M)$ und der Invarianz der Länge nach Umparametrisierungen. Für die 3-Ecksungleichung nehmen wir $\gamma_1 \in C_{p,q}(M)$ und $\gamma_2 \in C_{q,r}(M)$ beliebig. Dann

$$d_g(p, r) \leq L_g((\gamma_1 \circ \varphi_1) * (\gamma_2 \circ \varphi_2)) = L_g(\gamma_1 \circ \varphi_1) + L_g(\gamma_2 \circ \varphi_2) = L_g(\gamma_1) + L_g(\gamma_2).$$

Wir nehmen nun das Infimum für $\gamma_1 \in C_{p,q}(M)$ und $\gamma_2 \in C_{q,r}(M)$ um die gewünschte Ungleichung zu finden. \square

Um den Rest des Beweises durchführen zu können, brauchen wir einen lokalen Vergleichssatz zwischen $|\cdot|_g$ und der euklidischen Norm in einer Karte.

Hilfssatz 2.22. *Es sei h eine Riemannsche Metrik auf einer offenen Menge V in \mathbb{R}^n . Für jede kompakte Menge $K \subset V$ gibt es Konstanten C_K^- und C_K^+ , sodass*

$$C_K^- |\xi|_{\text{euk}} \leq |\xi|_h \leq C_K^+ |\xi|_{\text{euk}}, \quad \forall x \in K, \forall \xi \in T_x V \cong \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Wir definieren die Menge $E = \{\xi \in T_x V \mid x \in K, |\xi|_{\text{euk}} = 1\} \cong K \times S^{n-1}$, die disjunkt zum Nullschnitt von TV ist. Dann ist $|\cdot|_h$ positiv auf E . Da E kompakt und $|\cdot|_h$ stetig ist, existieren $C_K^- \leq C_K^+$, sodass

$$C_K^- \leq |\xi|_h \leq C_K^+, \quad \forall \xi \in E.$$

Es sei nun $\xi \in T_x V$ mit $x \in K$ und $\xi \neq 0$. Nach der Homogenität von $|\cdot|_{\text{euk}}$, ist $\frac{\xi}{|\xi|_{\text{euk}}} \in E$ und

$$C_K^- \leq \left| \frac{\xi}{|\xi|_{\text{euk}}} \right|_h \leq C_K^+.$$

Die gewünschte Ungleichung folgt nun aus der Homogenität von $|\cdot|_h$. \square

Folgerung 2.23. *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und eine Karte (U, φ) um p mit $x := \varphi(p)$. Es sei $r_p > 0$ mit der Eigenschaft, dass der abgeschlossene euklidische Ball $\bar{B}_{r_p}(x_p)$ in $\varphi(U)$ enthalten ist. Dann existieren $C_p^-, C_p^+ > 0$, sodass für alle $r \leq r_p$*

- $d_g(p, q) \leq C_p^+ d_{\text{euk}}(x_p, \varphi(q))$, falls $q \in \varphi^{-1}(B_r(x_p))$.
- $d_g(p, q) \geq C_p^- r$, falls $q \notin \varphi^{-1}(B_r(x_p))$;

Beweis. Wir wenden Hilfssatz 2.22 mit $h := (\varphi^{-1})^*g$ und $K := \varphi(\bar{B}_{r_p}(x_p))$ an und finden Konstanten $C_p^- := C_K^-$ und $C_p^+ := C_K^+$. Es sei $q \in \varphi^{-1}(B_r(x_p))$ für $r \leq r_p$ und man nehme ein Geradenstück γ zwischen x_p und $\varphi(q)$. Dann $\varphi^{-1} \circ \gamma \in C_{p,q}(M)$ und

$$C_p^+ d_{\text{euk}}(x, \varphi(q)) = C_p^+ L_{\text{euk}}(\gamma) \geq L_h(\gamma) = L_g(\varphi^{-1} \circ \gamma) \geq d_g(p, q).$$

Es sei nun $q \notin \varphi^{-1}(B_r(x_p))$ und man nehme $r' < r$ beliebig sodass $q \notin \varphi^{-1}(\bar{B}_{r'}(x_p))$. Wir bemerken, dass

$$M \setminus \{\varphi^{-1}(\partial B_{r'}(x_p))\} = \varphi^{-1}(B_{r'}(x_p)) \sqcup M \setminus \{\varphi^{-1}(\bar{B}_{r'}(x_p))\}.$$

Beide Mengen auf der rechten Seite sind offen, die zweite, weil M Hausdorffsch ist und daher die kompakte Menge $\varphi^{-1}(\bar{B}_{r'}(x_p))$ auch abgeschlossen ist. Es sei $\gamma \in C_{p,q}(M)$ beliebig. Dann existiert $t_* \in [0, 1]$, sodass $\gamma([0, t_*]) \subset \varphi^{-1}(B_{r'}(x_p))$ und $\gamma(t_*) \in \varphi^{-1}(\partial B_{r'}(x_p))$. Wir haben

$$\begin{aligned} L_g(\gamma) &= L_g(\gamma|_{[0,t_*]} * \gamma|_{[t_*,1]}) = L_g(\gamma|_{[0,t_*]}) + L_g(\gamma|_{[t_*,1]}) \geq L_g(\gamma|_{[0,t_*]}) = L_h(\varphi \circ \gamma|_{[0,t_*]}) \\ &\geq C_p^- L_{\text{euk}}(\varphi \circ \gamma|_{[0,t_*]}) \\ &\geq C_p^- d_{\text{euk}}(x_p, \varphi(\gamma(t_*))) \\ &= C_p^- r', \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus $\varphi(\gamma(t_*)) \in \partial B_{r'}(x_p) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_{\text{euk}}(x_p, y) = r'\}$ folgt. Da γ und $r' < r$ beliebig waren, folgt die gewünschte Ungleichung. \square

Ende des Beweises von Satz 2.21. Es seien p und q zwei verschiedene Punkte auf M . Wir wählen eine Karte (U, φ) um p und wenden Folgerung 2.23 an. Es existiert $r \leq r_p$, sodass $q \notin \varphi^{-1}(\bar{B}_r(x_p))$. Dann $d_g(p, q) \geq C_p^- r > 0$. Wir zeigen nun, dass die Topologie von M und die von d_g induzierte Topologie übereinstimmen. Eine Basis der ersten Topologie sind die Mengen U , wobei (U, φ) eine Karte von M ist. Eine Basis der zweiten Topologie sind die Bälle $B_s^g(p)$. Es sei nun (U, φ) und $p \in U$ gegeben. Nach Folgerung 2.23 existiert ein $r > 0$, sodass

$$p \in B_{C_p^- r}^g(p) \subset \varphi^{-1}(B_r(x, p)) \subset U.$$

Also ist die metrische Topologie feiner als die Topologie von M .

Andersrum betrachten wir $B_s^g(p)$ und $p' \in B_s^g(p)$. Nach der 3-Ecksungleichung existiert $s' > 0$, sodass $B_{s'}^g(p') \subset B_s^g(p)$. Es sei (U, φ) eine Karte um p' . Nach Folgerung 2.23 gilt für alle $r' \leq r'_p$: $d_g(p', q') \leq C_{p'}^+ d_{\text{euk}}(x_{p'}, \varphi(q'))$ für alle $q' \in \varphi^{-1}(B_{r'}(x_{p'}))$. Das bedeutet, dass für $r' C_{p'}^+ \leq s'$ gilt

$$p' \in \varphi^{-1}(B_{r'}(x_{p'})) \subset B_{C_{p'}^+ r'}^g(p') \subset B_{s'}^g(p') \subset B_s^g(p).$$

Da $\varphi^{-1}(B_{r'}(x_{p'}))$ im Definitionsbereich der Karte φ ist, folgt es, dass die Topologie von M feiner als die metrische Topologie ist. \square

Wir wissen nun, dass d_g eine Abstandsfunktion ist, die die Topologie von M induziert. Eine zentrale Frage ist nun, wann eine minimierende Kurve $\gamma \in C_{p,q}(M)$, das heißt $d_g(p, q) = L_g(\gamma)$, existiert. Wir haben gesehen, dass schon für offene Mengen des euklidischen Raums solche Kurve nicht unbedingt existiert. Allerdings werden wir zeigen, dass, wenn p und q hinreichend nah sind, minimierende Kurven existieren und einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen: der geodätischen Gleichung. Bevor wir diese Unternehmung in Angriff nehmen, wollen wir uns im nächsten Abschnitt auf das Problem fokussieren, wie Riemannsche Metriken konstruiert werden können.

3 Konstruktion von Riemannschen Metriken

Die Theorie von Vektorbündeln gibt uns eine lokale Darstellung von Riemannschen Metriken und impliziert, dass jede Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik zulässt. Wir werden dann diskutieren, wie man aus alten Riemannschen Metriken neue schaffen kann. In dieser Fülle von Metriken wollen wir dann einige Beispiele isolieren, die von zentraler Bedeutung in der Differentialgeometrie und in der Physik sind. In unseren Argumenten werden wir allgemeiner mit Pseudo-Riemannschen Metriken arbeiten. Das hat zwei Hauptvorteile. Erstens treten wichtige Riemannsche Mannigfaltigkeiten wie der Hyperbolische Raum natürlich als Untermannigfaltigkeiten von Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten auf. Zweitens stellen Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten ein Modell für die Raumzeit in der allgemeinen Relativitätstheorie dar. Wir können dann diese Chance nutzen, um einen Blick auch in diese Theorie zu werfen.

3.1 Pseudo-Riemannsche Metriken

Definition 3.1. Eine Pseudo-Riemannsche (PR) Metrik g auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein symmetrisches Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$, sodass für jede $p \in M$ die Bilinearform

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

nicht ausgeartet ist. Das bedeutet, dass

$$\flat_p : T_p M \rightarrow T_p^* M, \quad \flat_p(u) \cdot v = g_p(u, v)$$

ein linearer Isomorphismus ist. Wir bezeichnen die Inverse mit $\sharp_p : T_p^* M \rightarrow T_p M$.

Die Signatur $(\sigma_+(g), \sigma_-(g))$ von g_p (bitte die Definition aus der linearen Algebra wiederholen) hängt nicht von p ab und heißt die Signatur von g . Für $\sigma_-(g) = 0$ bekommen wir den Begriff von Riemannscher Metrik zurück. Wenn $\sigma_-(g) = 1$, heißt g eine Lorentz-Metrik. △

Bemerkung 3.2. Wenn g eine PR-Metrik von Signatur $(\sigma_+(g), \sigma_-(g))$ ist, dann ist $-g$ eine PR-Metrik mit Signatur $(\sigma_+(-g) = \sigma_-(g), \sigma_-(-g) = \sigma_+(g))$. △

Definition 3.3. Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit. Ein Tangentialvektor $v \in T_p M$ für $p \in M$ heißt

$$\begin{aligned} &\text{raumartig, falls } g(v, v) > 0, \\ &\text{lichtartig, falls } g(v, v) = 0, \\ &\text{zeitartig, falls } g(v, v) < 0. \end{aligned} \quad \triangle$$

Es sei g eine PR-Metrik auf M . Wir betrachten einen Rahmen e_1, \dots, e_n für TM auf einer offenen Menge $U \subset M$ mit Dualrahmen e^1, \dots, e^n . Dann gilt

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} e^i \otimes e^j \quad \text{auf } U, \quad g_{ij} := g(e_i, e_j) : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Beispiel 3.4. Wenn $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ die Koordinatenvektorfelder einer Karte (U, φ) sind, dann

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{auf } U, \quad g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) : U \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei wir die Abkürzung $dx^i dx^j = dx^i \otimes dx^j$ benutzt haben. \triangle

Anders gesagt ist g in der entsprechenden Trivialisierung $\chi : TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ durch das glatte Matrixfeld $G = (g_{ij}) : U \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ repräsentiert:

$$((\chi^{-1})^* g)_p(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^T \cdot G(p) \cdot \xi_2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) \xi_1^i \xi_2^j, \quad \forall (p, \xi_1), (p, \xi_2) \in U \times \mathbb{R}^n.$$

Beispiel 3.5. Es sei $\delta^{(\sigma_+, \sigma_-)}$ die diagonale $n \times n$ -Matrix mit der ersten σ_+ Einträge gleich 1 und der letzten σ_- Einträge gleich -1 . Die flache PR-Metrik auf \mathbb{R}^n mit Signatur (σ_+, σ_-) ist gegeben durch

$$g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}} = \sum_{i=1}^{\sigma_+} (dx^i)^2 - \sum_{i=\sigma_++1}^n (dx^i)^2 = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}^{(\sigma_+, \sigma_-)} dx^i dx^j.$$

Wir benutzen die Notation $(\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$ für \mathbb{R}^n mit dieser PR-Metrik. Wir schreiben $g_{\mathbb{R}^n} = g_{\mathbb{R}^n, 0}$ für die euklidische Metrik g_{euk} . Die Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^{n-1,1}, g_{\mathbb{R}^{n-1,1}})$ ist der sogenannte Minkowski-Raum. \triangle

Wir sehen dann, dass $\flat : TM \rightarrow T^*M$ ein Bundelisomorphismus ist, dessen Darstellung in den Basen (e_i) und (e^j) genau durch die Matrix G gegeben ist:

$$\flat e_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} e^j, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Daher ist G invertierbar und die inverse Matrix $G^{-1} = (g^{ij})$ stellt die Umkehrabbildung $\sharp : T^*M \rightarrow TM$ dar.

Folgerung 3.6. Eine PR-Metrik liefert Isomorphismen von $C^\infty(M)$ -Modulen

$$\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M), \quad \sharp : \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

zwischen Vektorfelder und 1-Formen auf M , die invers zu einander sind. \square

Definition 3.7. Der Gradient von $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich einer PR-Metrik g ist das Vektorfeld $\text{grad } f := \sharp(df)$. Das heißt das eindeutige Vektorfeld mit $df = g(\text{grad } f, \cdot)$. \triangle

Wir können \flat und \sharp auf Tensoren höherer Stufe erweitern. Für $1 \leq r' \leq r$ und $1 \leq s' \leq s$ definieren wir $\flat^{(r', s')} : T^{(r, s)}M \rightarrow T^{(r-1, s+1)}M$ als die lineare Abbildung, die \flat vom r' -ten kontravarianten Eintrag nimmt und setzt den vor dem s' kovarianten Eintrag. Das heißt:

$$\flat^{(r', s')} \left(u \otimes v \otimes w \otimes \alpha \otimes \beta \right) = u \otimes w \otimes \alpha \otimes \flat(v) \otimes \beta,$$

wobei $u \in TM^{\otimes r'-1}$, $v \in TM$, $w \in TM^{\otimes (r-r')}$, $\alpha \in T^*M^{\otimes s'-1}$, $\beta \in T^*M^{\otimes (s-s')}$. Ein ähnliches Verfahren gibt $\sharp^{(r', s')} : T^{(r, s)}M \rightarrow T^{(r+1, s-1)}M$.

3.2 Konforme PR-Metriken und Existenz von R-Metriken

Nach Definition von PR-Metriken folgt, dass wenn g eine PR-Metrik auf M ist und $f : M \rightarrow (0, \infty)$ eine positive Funktion ist, dann ist $f^2 \cdot g$ eine PR-Metrik auf M mit derselben Signatur wie g .

Definition 3.8. Zwei PR-Metriken g_1, g_2 auf M heißen konform äquivalent, wenn es $\lambda : M \rightarrow (0, \infty)$ mit $g_2 = \lambda^2 g_1$ gibt. Eine Abbildung $F : (N, g_N) \rightarrow (M, g_M)$ heißt konform, wenn $F^* g_M$ konform äquivalent mit g_N ist. \triangle

Bemerkung 3.9. Zwei Riemannsche Metriken g_1, g_2 sind konform äquivalent genau dann, wenn sie die gleichen Winkel zwischen Tangentialvektoren bestimmen, siehe Blatt 1. \triangle

Beispiel 3.10. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene, zusammenhängende Teilmenge und $f : (U, g_{\text{euk}}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, g_{\text{euk}})$ eine glatte Funktion. Wir wollen verstehen, wenn f konform ist. Der Pullback $f^* g_{\text{euk}}$ hat die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} |\partial_x f|_{\text{euk}}^2 & g_{\text{euk}}(\partial_x f, \partial_y f) \\ g_{\text{euk}}(\partial_x f, \partial_y f) & |\partial_y f|_{\text{euk}}^2 \end{pmatrix}$$

Also muss $|\partial_x f|_{\text{euk}}^2 = |\partial_y f|_{\text{euk}}^2$ und $g_{\text{euk}}(\partial_x f, \partial_y f) = 0$ gelten. Wenn $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Multiplikation durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ darstellt, gilt dann $\partial_y f = \pm i \cdot \partial_x f$, wobei das Vorzeichen dasselbe für alle Punkte in U ist denn U zusammenhängend ist. Wenn $\partial_y f = i \cdot \partial_x f$ gilt, ist f eine holomorphe Funktion unter der Identifizierung $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Wenn $\partial_y f = -i \cdot \partial_x f$ gilt, ist f antiholomorph. \triangle

Im Allgemeinen ist die Summe von zwei PR-Metriken mit gleicher Signatur nicht unbedingt eine PR-Metrik. Die Summe von zwei Riemannschen Metriken ist aber eine Riemannsche Metrik, da die Summe von positiven Zahlen wieder positiv ist. Diese elementare Beobachtung impliziert die Existenz von Riemannschen Metriken auf beliebigen Mannigfaltigkeiten.

Satz 3.11. *Jede Mannigfaltigkeit trägt eine Riemannsche Metrik.*

Beweis. Es sei $\chi : TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^h$ eine Trivialisierung von TM . Wir setzen $g^U := \chi^* g_{\text{euk}}$. Da χ ein Bündelisomorphismus ist, ist g^U eine Riemannsche Metrik auf E_U . Es sei nun $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M , die aus trivialisierenden offenen Mengen besteht. Es sei $\{\rho_i\}_{i \in I}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich dieser Überdeckung. Dann setzen wir

$$g := \sum_{i \in I} \rho_i g^{U_i} \in \Gamma(T^* M \otimes T^* M)$$

und wir müssen nun die positive Definitheit überprüfen. Es sei $p \in M$. Dann existiert eine endliche nichtleere Teilmenge $I' \subset I$, sodass $\rho_i(p) > 0$ genau dann, wenn $i \in I'$. In diesem Fall ist $p \in U_i$ und für alle $v \in T_p M \setminus \{0\}$ ist $g_p^{U_i}(v, v) > 0$. Daher

$$g_p(v, v) = \sum_{i \in I'} \rho_i(p) g_p^{U_i}(v, v) > 0. \quad \square$$

Bemerkung 3.12. PR-Metriken mit gegebener Signatur existieren auf einer beliebigen Mannigfaltigkeit M nicht unbedingt, da diese Metriken topologische Bedingungen erfordern. Zum Beispiel existiert auf S^2 keine Lorentz-Metrik. Um zu sehen wie die Topologie die Existenz von PR-Metriken beeinflusst, betrachten wir den Fall, in dem $TM = E_1 \oplus E_2$ die direkte Summe von zwei Vektorbündeln mit Dimension k_1 und k_2 ist. Die Existenz solcher Zerlegung hängt von der Topologie von M ab (zum Beispiel wenn M eine kompakte Fläche ist, muss M der 2-Torus oder die Kleinsche Fläche sein). Wir können dann den Beweis von Satz 3.11 nachahmen und Riemannsche Metriken g_1 auf E_1 und g_2 auf E_2 definieren. Dann ist $g_1 \oplus (-g_2)$ eine PR-Metrik auf M mit Signatur (k_1, k_2) . \triangle

Bemerkung 3.13. Man kann zeigen, dass M eine Lorentz-Metrik genau dann besitzt, wenn $TM = E_1 \oplus E_{n-1}$, wobei E_1 vom Rang eins ist. \triangle

3.3 Orthogonalität und Pseudo-Riemannsche Immersionen

Wir haben bemerkt, dass ein Skalarprodukt g auf einem Vektorraum V ein Skalarprodukt $g|_W$ auf einem Untervektorraum W von V induziert. Ist dagegen g eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V , so ist $g|_W$ wohl symmetrisch und bilinear kann aber ausgeartet sein. Auch wenn $g|_W$ nicht ausgeartet ist, hängt ihre Signatur stark von W ab.

Beispiel 3.14. Es sei $V = \mathbb{R}^2$, $g = dx^2 - dt^2$, $W = \mathbb{R} \cdot (x, t)$, wobei $(x, t) \neq 0$. Dann

$$g|_W \text{ ist } \begin{cases} \text{positiv definit,} & \text{falls } x^2 - t^2 > 0, \\ \text{gleich null,} & \text{falls } x^2 - t^2 = 0, \\ \text{negativ definit,} & \text{falls } x^2 - t^2 < 0. \end{cases} \quad \triangle$$

Also liefert nicht jede Immersion $F : N \rightarrow M$ in eine PR-Mannigfaltigkeit (M, g) eine PR-Metrik auf N durch Pullback, ganz im Gegenteil zu der Situation für Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Definition 3.15. Eine Abbildung $F : N \rightarrow M$ in eine PR-Mannigfaltigkeit (M, g) heißt PR-Immersion, wenn F^*g eine PR-Metrik auf N ist. \triangle

Um PR-Immersionen zu verstehen, fragen wir zunächst, wann die Einschränkung $g|_W$ einer nicht ausgearteten, symmetrischen Bilinearform $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Untervektorraum $W \subset V$ wieder nicht ausgeartet ist. Dazu brauchen wir den Begriff von Orthogonalität.

Definition 3.16. Es sei $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische und nicht ausgeartete Bilinearform. Wir sagen, dass v_1, v_2 orthogonal (oder senkrecht) zu einander stehen, wenn $g(v_1, v_2) = 0$. Wenn $W \subset V$ ein Untervektorraum ist, setzen wir

$$W^\perp := \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \quad \forall w \in W\}$$

für den orthogonalen Untervektorraum zu W . \triangle

Aus der linearen Algebra kennen wir das folgende Resultat aus.

Satz 3.17. *Es sei $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische und nicht ausgeartete Bilinearform und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Dann:*

- $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$;
- $(W^\perp)^\perp = W$;
- es gilt die Äquivalenz

$$g|_W \text{ nicht ausgeartet} \iff W \cap W^\perp = \{0\} \iff g|_{W^\perp} \text{ nicht ausgeartet.}$$

In diesem Fall haben wir

$$\sigma_+(g) = \sigma_+(g|_W) + \sigma_+(g|_{W^\perp}), \quad \sigma_-(g) = \sigma_-(g|_W) + \sigma_-(g|_{W^\perp}).$$

- Für $\dim W = \dim V - 1$ sei $W^\perp = \mathbb{R} \cdot v$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$. Dann

$$g|_W \text{ ist } \begin{cases} \text{nicht ausgeartet mit Signatur } (\sigma_+(g), \sigma_-(g) - 1), & \text{falls } g(v, v) < 0, \\ \text{ausgeartet,} & \text{falls } g(v, v) = 0, \\ \text{nicht ausgeartet mit Signatur } (\sigma_+(g) - 1, \sigma_-(g)), & \text{falls } g(v, v) > 0. \end{cases}$$

□

Folgerung 3.18. *Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $N = f^{-1}(c) \neq \emptyset$ für ein $c \in \mathbb{R}$ mit kanonischer Inklusion $\iota : N \rightarrow M$. Wenn $\text{grad } f(p)$ für alle $p \in N$ zeitartig ist, dann ist N eine Untermannigfaltigkeit und ι^*g eine PR-Metrik auf N mit Signatur $(\sigma_+(g), \sigma_-(g) - 1)$. Wenn $\text{grad } f(p)$ für alle $p \in N$ raumartig ist, dann ist N eine Untermannigfaltigkeit und ι^*g eine PR-Metrik auf N mit Signatur $(\sigma_+(g) - 1, \sigma_-(g))$. In beiden Fällen haben wir die orthogonale Zerlegung $T_{\iota(p)}M = T_p N \oplus \mathbb{R} \cdot \text{grad } f(p)$ für alle $p \in N$ (anders gesagt $\mathbb{R} \cdot \text{grad } f(p) = T_p N^\perp$). □*

Wir wollen die obige Diskussion in einem wichtigen Beispiel anwenden.

Beispiel 3.19. Wir nehmen natürliche Zahlen σ_+, σ_- mit $\sigma_+ + \sigma_- = n + 1$ und betrachten $(\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}) = \mathbb{R}^{\sigma_+} \times \mathbb{R}^{\sigma_-}$. Wir identifizieren $\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-} \cong \mathbb{R}^{\sigma_+} \times \mathbb{R}^{\sigma_-}$, sodass $g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}} = \sum_{i=1}^{\sigma_+} d(x^i)^2 - \sum_{j=1}^{\sigma_-} d(t^j)^2$. Wir betrachten die zugehörige quadratische Form

$$Q_{(\sigma_+, \sigma_-)} : \mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-} \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}(x, t) = \sum_{i=1}^{\sigma_+} (x^i)^2 - \sum_{j=1}^{\sigma_-} (t^j)^2 = |x|_{\text{euk}}^2 - |t|_{\text{euk}}^2.$$

Eine einfache Berechnung liefert

$$\text{grad } Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}(x, t) = 2(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}.$$

Wir betrachten $c \in \mathbb{R}$ und die Inklusion $\iota_c : Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c) \rightarrow \mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}$. Für $(x, t) \in Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c)$ gilt

$$g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}(\text{grad } Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}(x, t), \text{grad } Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}(x, t)) = 4(|x|_{\text{euk}}^2 - |t|_{\text{euk}}^2) = 4Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}(x, t) = 4c.$$

Für $c \neq 0$ ist $(Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c), \iota_c^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$ eine PR-Mannigfaltigkeit nach Folgerung 3.18. Wir haben dazu, dass $\mathbb{R} \cdot (x, t) = (TQ_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c))^\perp$ und

$$\iota_c^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}} \text{ besitzt Signatur } \begin{cases} (\sigma_+ - 1, \sigma_-) & \text{falls } c > 0 \\ (\sigma_+, \sigma_- - 1) & \text{falls } c < 0. \end{cases}$$

Außerdem haben wir Diffeomorphismen

$$S^{\sigma_+ - 1} \times \mathbb{R}^{\sigma_-} \rightarrow Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c), \quad (y, t) \mapsto \left(\sqrt{|t|_{\text{euk}}^2 + c \cdot y}, t \right), \quad \text{für } c > 0, \quad (3.1)$$

$$\mathbb{R}^{\sigma_+} \times S^{\sigma_- - 1} \rightarrow Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c), \quad (x, s) \mapsto \left(x, \sqrt{|x|_{\text{euk}}^2 - c \cdot s} \right), \quad \text{für } c < 0. \quad (3.2)$$

Wir geben nun einen Namen zu denjenigen Fällen, für die $\iota_c^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}$ Riemannsch oder Lorentz ist. Es sei r eine positive reelle Zahl. Dann:

- Die Riemannsche Mannigfaltigkeit

$$(S_r^n, g_{S_r^n}) := (Q_{(n+1,0)}^{-1}(r^2), \iota_{r^2}^* g_{\mathbb{R}^{n+1,0}})$$

ist die n -dimensionale euklidische Sphäre mit Krümmungsradius $r > 0$.

- Die Riemannsche Mannigfaltigkeit

$$(H_r^n, g_{H_r^n}) := (Q_{(n,1)}^{-1}(-r^2) \cap \{t^1 > 0\}, \iota_{-r^2}^* g_{\mathbb{R}^{n,1}})$$

ist der n -dimensionale hyperbolische Raum mit Krümmungsradius $r > 0$. Hier haben wir die Schnittmenge mit $\{t^1 > 0\}$ genommen weil $Q_{(n,1)}^{-1}(-r^2) \cong \mathbb{R}^n \times S^0 = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n$ zwei zusammenhängende Komponenten besitzt. Insbesondere liefert (3.2) den Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \rightarrow H_r^n$, $x \mapsto (x, \sqrt{|x|_{\text{euk}}^2 + r^2})$.

- Die Lorentz-Mannigfaltigkeit

$$(dS_r^n, g_{dS_r^n}) := (Q_{(n,1)}^{-1}(r^2), \iota_{r^2}^* g_{\mathbb{R}^{n,1}})$$

ist der n -dimensionale de-Sitter-Raum mit Krümmungsradius $r > 0$. Hier liefert (3.1) einen Diffeomorphismus $S^{n-1} \times \mathbb{R} \mapsto dS_r^n$.

- Die Lorentz-Mannigfaltigkeit

$$(AdS_r^n, g_{AdS_r^n}) := (Q_{(n-1,2)}^{-1}(-r^2), \iota_{-r^2}^* g_{\mathbb{R}^{n-1,2}})$$

ist der n -dimensionale Anti-de-Sitter-Raum mit Krümmungsradius $r > 0$. Hier liefert (3.2) einen Diffeomorphismus $\mathbb{R}^{n-1} \times S^1 \rightarrow AdS_r^n$. △

Wir wollen nun die Diskussion über die Orthogonalität mit der Existenz von orthonormalen Rahmen und Normalenbündeln schließen.

Definition 3.20. Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit mit Signatur (σ_+, σ_-) . Ein Rahmen e_1, \dots, e_n von TM auf U heißt orthonormal, wenn $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}^{(\sigma_+, \sigma_-)}$ für alle i, j . \triangle

Satz 3.21. Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und E eine tangentielle Distribution auf M (d.h. E ist ein Unterbündel von TM), sodass $E \cap E^\perp = 0_{TM}$. Dann existiert für alle $p \in M$ orthonormale Rahmen $e_1, \dots, e_k \in E$ und $e_{k+1}, \dots, e_n \in E^\perp$ auf einer Umgebung von p . Insbesondere ist E^\perp eine Distribution vom Rang $n - k$, das sogenannte Normalenbündel von E in TM , und es gibt einen Bündelisomorphismus $TM \cong E \oplus E^\perp$. Die so entstandene orthogonale Projektion $\Pi : TM \rightarrow E$ ist ein (surjektiver) Bündelhomomorphismus mit $\Pi|_E = \text{id}_E$ und $\ker \Pi = E^\perp$.

Beweis. Da $E_p \cap E_p^\perp = \{0\}$ gilt, existieren $v_1, \dots, v_k \in E_p$, die eine orthonormale Basis für $g|_{E_p}$ bilden und $v_{k+1}, \dots, v_n \in E_p^\perp$, die eine orthonormale Basis für $g|_{E_p^\perp}$ bilden. Da E ein Unterbündel ist, können wir Vektorfelder $e'_1, \dots, e'_k \in E$ auf einer Umgebung von p finden, sodass $e'_i(p) = v_i$. Außerdem können wir Vektorfelder $e'_{k+1}, \dots, e'_n \in TM$ auf einer Umgebung von p finden, sodass $e'_i(p) = v_i$. Wir setzen E_i als die von den Vektorfeldern e_1, \dots, e_i erzeugte Distribution. Da v_1, \dots, v_n eine orthonormale Basis bilden, existiert eine Umgebung von p , sodass alle die Einschränkungen $g|_{E_i}$ nicht ausgeartet sind. Wir wenden nun das Verfahren von Gram-Schmidt an:

$$e''_1 := e'_1, \quad e''_j := e'_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g(e'_j, e''_i)}{g(e''_i, e''_i)} e''_i, \quad j = 2, \dots, n.$$

Für die Wohldefinitheit müssen wir prüfen, dass $g(e''_i, e''_i) \neq 0$. Die Vektorfelder e''_1, \dots, e''_i spannen E_i auf und sind orthogonal zu einander. Wenn $g(e''_i, e''_i) = 0$ wäre, würde $g(e''_i, v) = 0$ für alle $v \in E_i$ sein. Das widerspricht der Voraussetzung, dass $g|_{E_i}$ nicht ausgeartet ist. Schließlich setzen wir

$$e_i := \frac{1}{\sqrt{|g(e''_i, e''_i)|}} e''_i.$$

Dann sind e_1, \dots, e_k und e_{k+1}, \dots, e_n die gesuchten Rahmen. Da E^\perp einen Rahmen von $n - k$ Vektorfelder um jeden Punkt besitzt, ist E^\perp ein Unterbündel. Wir definieren $E \oplus E^\perp \rightarrow TM$ als $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$. Wenn wir Trivialisierungen e_1, \dots, e_k für E , e_{k+1}, \dots, e_n für E^\perp und e_1, \dots, e_n für TM wählen, dann ist diese Abbildung durch der kanonische Isomorphismus $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^n$ dargestellt. Es ist somit gezeigt, dass $E \oplus E^\perp \rightarrow TM$ ein Isomorphismus ist. Ein ähnliches Argument impliziert, dass die orthogonale Projektion ein Bündelhomomorphismus ist. \square

Die Resultate in diesem Abschnitt gelten für eine allgemeinere Klasse von Objekten.

Definition 3.22. Ein pseudoorthogonales Vektorbündel ist ein Paar (E, g) , wobei E ein Vektorbündel und g eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ ist. \triangle

Bemerkung 3.23. Eine PR-Mannigfaltigkeit (M, g) liefert das pseudo-orthogonale Vektorbündel (TM, g) (die Notation kann hier ein bisschen verwirrend sein). \triangle

Pseudoorthogonale Vektorbündel treten natürlich auf, wenn wir Abbildungen $F : N \rightarrow M$ in eine PR-Mannigfaltigkeit (M, g) betrachten. Auch wenn F keine PR-Immersion ist, können wir das Pullback-Bündel ${}^F TM$ von TM durch F betrachten. Die Schnitte dieses Vektorbündels sind auch Vektorfelder von M entlang F genannt.

Die PR-Metrik g wird dann zu einer symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearform $g \circ F$ auf ${}^F TM$ zurückgezogen und $({}^F TM, g \circ F)$ ist ein pseudoorthogonales Vektorbündel

$$\begin{array}{ccc} TN & \xrightarrow{dF} & dF(TN) \subset ({}^F TM, g \circ F) \xrightarrow{\tilde{F}} (TM, g) \\ & \searrow \pi_N & \downarrow F \pi_M \qquad \qquad \qquad \downarrow \pi_M \\ & & N \xrightarrow{F} M \end{array}$$

Das Differential dF kann nun auch als ein Bündelhomomorphismus $dF : TN \rightarrow {}^F TM$ über N betrachtet werden. Im Allgemein ist aber $dF(TN)$ kein Unterbündel von ${}^F TM$, weil der Rang von $d_p F$ von $p \in N$ abhängen könnte. Wenn aber F eine PR-Immersion ist, ist $(dF(TN), (g \circ F)|_{dF(TN)})$ ein pseudoorthogonales Unterbündel und

$$dF : (TN, F^*g) \rightarrow (dF(TN), (g \circ F)|_{dF(TN)})$$

ein Isomorphismus von pseudoorthogonalen Vektorbündeln.

Definition 3.24. Es sei $F : N \rightarrow (M, g)$ eine PR-Immersion. Das pseudoorthogonale Unterbündel $(\mathcal{N}_F^g := dF(TN)^\perp, (g \circ F)|_{dF(TN)^\perp})$ in $({}^F TM, g \circ F)$ heißt Normalenbündel von F in M (oder auch von N , wenn F die Inklusion ist). Wir haben die Zerlegung ${}^F TM = dF(TN) \oplus \mathcal{N}_F^g$ und die orthogonale Projektion

$$\Pi : {}^F TM \rightarrow TN, \quad \Pi(u) = (dF)^{-1}(u_1), \quad \forall u \in {}^F TM$$

wobei $u = u_1 + u_2$, $(u_1, u_2) \in dF(TN) \oplus \mathcal{N}_F^g$. \triangle

Bemerkung 3.25. Die orthogonale Projektion $\Pi : {}^F TM \rightarrow TN$ ist durch die Eigenschaften $\Pi \circ dF = \text{id}_{TN}$ und $\ker \Pi = \mathcal{N}_F^g$ charakterisiert. Die sind äquivalent zu der Identität

$$g_{F(p)}(d_p F \cdot u, v) = (F^*g)_p(u, \Pi \cdot v), \quad \forall p \in N, \forall u \in T_p N, \forall v \in ({}^F TM)_p. \quad (3.3)$$

\triangle

3.4 Isometrien

Wenn (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit ist, haben wir durch Multiplikation mit einer positiven Funktion unendlich viele weitere Metriken auf M konstruiert. Eine andere einfache Weise, um weitere PR-Metriken zu erzeugen, ist den Pullback F^*g durch Diffeomorphismen $F : M \rightarrow M$ zu nehmen. Das führt uns zum Begriff der Isometrie.

Definition 3.26. Es seien (N, g_N) und (M, g_M) PR-Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F : N \rightarrow M$ heißt isometrische Immersion, falls $F^*g_M = g_N$. Ist $\dim M = \dim N$, so heißt F lokale Isometrie. Wenn F dazu bijektiv ist, heißt F Isometrie und wir sagen, dass (M, g_M) und (N, g_N) isometrisch sind. \triangle

Bemerkung 3.27. Das Differential einer isometrischen Immersion ist immer injektiv, so dass $\dim M \geq \dim N$ (genauer gilt $\sigma_-(g_N) \leq \sigma_-(g_M)$ und $\sigma_+(g_N) \leq \sigma_+(g_M)$). Insbesondere sind (lokale) Isometrien (lokale) Diffeomorphismen. Es folgt daraus, dass für alle $p \in N$ eine offene Umgebung U_N von $p \in N$ und eine offene Umgebung U_M von $F(p)$ in M existieren, sodass $F|_{U_N} : (U_N, g_N|_{U_N}) \rightarrow (U_M, g_M|_{U_M})$ eine Isometrie ist. \triangle

Bemerkung 3.28. Isometrisch sein ist eine Äquivalenzrelation. \triangle

Bemerkung 3.29. Eine Karte $\varphi : U \rightarrow V$ von einer PR-Mannigfaltigkeit (M, g) mit Signatur (σ_+, σ_-) ist eine Isometrie zwischen $g|_U$ und $g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}|_V$ genau dann, wenn

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^m \delta_{ij}^{(\sigma_+, \sigma_-)} dx^i dx^j. \quad \triangle$$

Wenn $F : (N, g_N) \rightarrow (M, g_M)$ eine Isometrie ist, können wir (N, g_N) und (M, g_M) als gleich betrachten. Denn werden wir sehen, dass alle Objekte, die durch g_M (bzw. g_N) konstruiert werden (z.B. Levi-Civita Zusammenhang, Geodätische, Krümmung), durch F korrespondieren. Hier können wir schon sehen, dass, wenn wir mit Riemannschen Mannigfaltigkeiten arbeiten, die Längen von Kurven und die Abstände zwischen Punkten durch Isometrien durch F erhalten bleiben.

Satz 3.30. Es sei $F : (N, g_N) \rightarrow (M, g_M)$ eine Isometrie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Für alle $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow N$ gilt $L_{g_M}(F \circ \gamma) = L_{g_N}(\gamma)$, sodass

$$d_{g_M}(F(p), F(q)) = d_{g_N}(p, q), \quad \forall p, q \in N. \quad (3.4)$$

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned} L_{g_M}(F \circ \gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_M\left(\frac{d}{dt}(F \circ \gamma), \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)\right)} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_M(dF \cdot \dot{\gamma}, dF \cdot \dot{\gamma})} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_N(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt \\ &= L_{g_N}(\gamma). \end{aligned}$$

Für alle $p, q \in N$ haben wir die assoziierte Abbildung $F : C_{p,q}(N) \rightarrow C_{F(p), F(q)}(M)$, $\gamma \mapsto F \circ \gamma$, sodass für alle $\gamma \in C_{p,q}(N)$

$$d_{g_M}(F(p), F(q)) \leq L_{g_M}(F \circ \gamma) = L_{g_N}(\gamma)$$

gilt. Wir nehmen das Infimum über $\gamma \in C_{p,q}(N)$ und finden $d_{g_M}(F(p), F(q)) \leq d_{g_N}(p, q)$. Wenn wir nun die inverse Isometrie F^{-1} betrachten, bekommen wir auch die umgekehrte Ungleichung. \square

Man könnte sich umgekehrt fragen, ob eine (nicht unbedingt glatte) bijektive Abbildung $F : N \rightarrow M$, für die (3.4) gilt, eine Isometrie zwischen (M, g_M) und (N, g_N) ist. Das ist eigentlich der Fall, wie der nächste Satz, den wir aus zeitlichen Gründen in diesem Modul wahrscheinlich nicht beweisen können, zeigt.

Satz 3.31 (Myers-Steenrod I). *Es seien (M, g_M) und (N, g_N) Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F : N \rightarrow M$ eine nicht unbedingt glatte Bijektion, sodass (3.4) gilt. Dann ist F glatt und eine Isometrie zwischen (N, g_N) und (M, g_M) .* \square

Folgerung 3.32. *Es seien g_1, g_2 zwei Riemannsche Metriken auf M , sodass $d_{g_1} = d_{g_2}$. Dann folgt $g_1 = g_2$. Also bestimmt die Abstandsfunktion die Riemannsche Metrik.*

Beweis. Man benutze Satz 3.31 mit $F = \text{id}_M$. \square

Isometrien können nicht nur benutzt werden, um zwei PR-Mannigfaltigkeiten zu identifizieren, sondern auch um die Symmetrien einer PR-Mannigfaltigkeit (M, g) zu untersuchen. Diese Symmetrien sind nämlich die Isometrien von (M, g) in sich selbst.

Definition 3.33. Die Isometrie-Gruppe $\text{Iso}(M, g_M) := \{F : M \rightarrow M \mid F^*g_M = g_M\}$ ist die Gruppe aller Isometrien von (M, g_M) auf sich selbst. Eine PR-Mannigfaltigkeit heißt homogen, wenn für alle $p, q \in M$ ein $F \in \text{Iso}(M, g_M)$ mit $F(p) = q$ existiert. Für $p \in M$ heißt der Stabilisator $\text{Iso}_p(M, g) := \{\gamma \in G \mid \gamma(p) = p\}$ die Isotropiegruppe von p .

Eine PR-Mannigfaltigkeit heißt Rahmen-homogen, wenn für alle $p, q \in M$ und alle orthonormalen Basen $e_1, \dots, e_n \in T_pM$, $e'_1, \dots, e'_n \in T_qM$ eine Isometrie $F : M \rightarrow M$ mit $F(p) = q$ und $d_pF(e_i) = e'_i$ für alle i existiert. \triangle

Wir wollen auch einen Namen zu den Vektorfeldern geben, die einen Fluß von Isometrien erzeugen.

Definition 3.34. Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld X auf M ist Killing, wenn Φ_X^t eine Isometrie von g auf ihrem Definitionsbereich für alle $t \in \mathbb{R}$. \triangle

Nach Satz 8.16 in Differential Geometrie 1 haben wir die folgende Charakterisierung von Killing-Vektorfelder.

Satz 3.35. *Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld auf M ist genau dann Killing, wenn die Lie-Ableitung von g entlang X verschwindet: $\mathcal{L}_Xg = 0$.*

Was können wir im Allgemeinen über die Isometriegruppe einer PR-Mannigfaltigkeit (M, g) sagen? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir den sogenannten Rahmen-Bündel

$$O(M, g) := \bigsqcup_{p \in M} O(M, g)_p, \quad O(M, g)_p := \{\text{orthonormale Basen von } (T_pM, g_p)\}.$$

Für alle $p \in M$ haben wir eine nicht kanonische Bijektion $O(\sigma_+(g), \sigma_-(g)) \rightarrow O(M, g)_p$, wobei

$$O(\sigma_+, \sigma_-) := \left\{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T \cdot \delta^{(\sigma_+, \sigma_-)} \cdot A = \delta^{(\sigma_+, \sigma_-)} \right\}$$

die pseudoorthogonale Gruppe mit Signatur (σ_+, σ_-) ist. Aus Beispiel 5.29 im Skript Differentialgeometrie 1 wissen wir, dass $O(\sigma_+, \sigma_-)$ eine Lie-Gruppe der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist, wobei $n = \sigma_+ + \sigma_-$. Wenn wir einen Rahmen $(e_1, \dots, e_n) \in O(M, g)_p$ willkürlich wählen, ist die Bijektion $O(\sigma_+(g), \sigma_-(g)) \rightarrow O(M, g)_p$ als

$$A \mapsto \left(\sum_{i=1}^n A_1^i \cdot e_i, \dots, \sum_{i=1}^n A_n^i \cdot e_i \right)$$

gegeben. Man kann weiter zeigen, dass $O(M, g)$ eine Mannigfaltigkeit mit Dimension

$$\dim M + \frac{1}{2} \dim M(\dim M - 1) = \frac{1}{2} \dim M(\dim M + 1)$$

ist und dass die natürliche Projektion $O(M, g) \rightarrow M$ ein Hauptfaserbündel³ ist, obwohl diese Information in diesem Modul nicht gebraucht wird.

Beispiel 3.36. Zeigen Sie: es existieren Bijektionen $\mathbb{R}^n \times O(\sigma_+, \sigma_-) \rightarrow O(\mathbb{R}^n, g_{(\sigma_+, \sigma_-)})$ und $O(\sigma_+, \sigma_-) \rightarrow O((Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c), \iota_c^* g_{(\sigma_+, \sigma_-)}))$. Es besteht weiter eine Bijektion $O^+(n, 1) \rightarrow O(H_r^n, g_{H_r^n})$, wobei $O^+(n, 1)$ die folgende Untergruppe von $O(n, 1)$ ist:

$$O^+(n, 1) = \{A \in O(n, 1) \mid A_{n+1, n+1} > 0\}. \quad (3.5)$$

△

Wenn wir $p \in M$ und $(e_1, \dots, e_n) \in O(M, g)_p$ wählen, bekommen wir eine Abbildung

$$I : \text{Iso}(M, g) \rightarrow O(M, g), \quad I(F) = (d_p F \cdot e_1, \dots, d_p F \cdot e_n).$$

Satz 3.37. Die Abbildung I ist injektiv. Sie ist surjektiv genau dann, wenn (M, g) Rahmenhomogen ist.

Die Aussage über die Surjektivität ist unmittelbar. Die Injektivität wird in Folgerung 4.35 gezeigt und erlaubt uns $\text{Iso}(M, g)$ mit einer Teilmenge der Mannigfaltigkeit $O(M, g)$ zu identifizieren. Wie der nächste Satz zeigt, ist $I(\text{Iso}(M, g))$ eigentlich eine Untermannigfaltigkeit von $O(M, g)$, sodass wir eine glatte Struktur auf der Isometriegruppe definieren können.

Satz 3.38 (Myers-Steenrod II). Die Isometriegruppe $\text{Iso}(M, g)$ hat die Struktur einer Lie-Gruppe, sodass I eine Einbettung ist und $\text{Iso}(M, g) \times M \rightarrow M$ eine Linkswirkung ist. Insbesondere

$$\dim \text{Iso}(M, g) \leq \frac{1}{2} \dim M(\dim M + 1)$$

und wir können den Vektorraum von Killing-Vektorfeldern mit $T_{\text{id}_M} \text{Iso}(M, g)$ identifizieren. Schließlich stimmt die Topologie auf $\text{Iso}(M, g)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen überein.

³Für die Definition von Hauptfaserbündel sehen Sie Wikipedia und die da referenzierte Literatur

Beispiel 3.39. Für alle $v \in \mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}$ sind die Verschiebungen $\tau_v : \mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-} \rightarrow \mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}$ Isometrien von $(\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$. Wenn $A \in O(\sigma_+, \sigma_-)$ ist $\mu_A \in \text{Iso}(\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$, wobei $\mu_A(p) = A \cdot p$ für alle $p \in \mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}$. Es sei $\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-} \rtimes O(\sigma_+, \sigma_-)$ die Gruppe von Isometrien, die durch die τ_v und μ_A erzeugt ist. Im Blatt 2 zeigen wir, dass $I(\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-} \rtimes O(\sigma_+, \sigma_-)) = O(\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$. Aus Satz 3.37 folgt, dass

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}) = \mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-} \rtimes O(\sigma_+, \sigma_-). \quad \triangle$$

Beispiel 3.40. Es seien $(Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c), \iota_c^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$ die im Beispiel 3.19 betrachteten PR-Mannigfaltigkeiten. Für alle $A \in O(\sigma_+, \sigma_-)$ haben wir $\mu_A(Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c)) = (Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c))$. Also bekommen wir die Einschränkung $\mu_{A,c} : Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c) \rightarrow Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c)$, sodass $\iota_c \circ \mu_{A,c} = \mu_A \circ \iota_c$. Dies ist eine Isometrie:

$$\mu_{A,c}^*(\iota_c^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}) = \iota_c^* \mu_A^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}} = \iota_c^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}.$$

Also $O(\sigma_+, \sigma_-) \subset \text{Iso}(Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c), \iota_c^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$. Im Blatt 2 zeigen wir, dass $I(O(\sigma_+, \sigma_-)) = O(Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c), \iota_c^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$. Aus Satz 3.37 folgt, dass

$$\text{Iso}(Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(c), \iota_c^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}) = O(\sigma_+, \sigma_-)$$

Wir haben den hyperbolischen Raum H_r^n als die Zusammenhangskomponente von $Q_{(n,1)}^{-1}(c)$, die in $\{t > 0\}$ enthalten ist, definiert. Die in (3.5) definierte Untergruppe $O^+(n, 1) \subset O(n, 1)$ erhält H_r^n , sodass $O^+(n, 1) \subset \text{Iso}(H_r^n, g_{H_r^n})$. Nach $I(O(n, 1)) = O(Q_{(n,1)}^{-1}(c), \iota_c^* g_{\mathbb{R}^{n,1}})$ folgt $I(O^+(n, 1)) = O(H_r^n, g_{H_r^n})$. Satz 3.37 impliziert

$$\text{Iso}(H_r^n, g_{H_r^n}) = O^+(n, 1). \quad \triangle$$

Gibt es andere PR-Mannigfaltigkeiten, die Rahmen-homogen sind? Hier geben wir die Antwort für R-Mannigfaltigkeiten. Für PR-Mannigfaltigkeiten gilt eine ähnliche Version.

Satz 3.41. *Es sei (M, g) eine Rahmen-homogene R-Mannigfaltigkeit mit $\dim M \geq 2$. Dann:*

- (a) *wenn (M, g) einfach zusammenhängend ist, ist (M, g) entweder $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ oder $(S_r^n, g_{S_r^n})$, oder $(H_r^n, g_{H_r^n})$;*
- (b) *wenn (M, g) nicht einfach zusammenhängend ist, dann ist $(M, g) = (\mathbb{R}P_r^n, g_{\mathbb{R}P_r^n})$, wobei $g_{\mathbb{R}P_r^n}$ durch die folgende Eigenschaft charakterisiert ist: es gilt $\iota^* g_{\mathbb{R}P_r^n} = g_{S_r^n}$, wobei $\iota : S_r^n \rightarrow \mathbb{R}P_r^n$ die Quotientenabbildung ist.*

Wir werden später (a) zeigen. Wer interessiert ist, kann (b) im Theorem 3.1 von [Kobayashi, Transformation Groups in Differential Geometry, 1972] finden.

Wir lassen hier offen die Frage der Klassifikation von homogenen PR-Mannigfaltigkeiten (M, g) . Wir machen nur die folgende Bemerkung. Wir schreiben $G = \text{Iso}(M, g)$ und $H = \text{Iso}_p(M, g)$ für ein $p \in M$. Dann ist H eine abgeschlossene Lie-Untergruppe von G . Nach

Bemerkung 3.63 besitzt G/H die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, sodass wir eine glatte Linkswirkung von G auf G/H haben:

$$G \times (G/H), \quad (\gamma_1, \gamma_2 H) \mapsto \gamma_1 \gamma_2 H.$$

Dann haben wir einen Diffeomorphismus

$$F : G/H \rightarrow M, \quad \gamma H \mapsto \gamma(p)$$

wobei die Surjektivität genau von der Homogenität von (M, g) gewährleistet wird. Der Diffeomorphismus F ist equivariant bezüglich der Linkswirkungen von G auf G/H und M :

$$F(\gamma_1 \gamma_2 H) = \gamma_1(F(\gamma_2 H)), \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in G.$$

Daher ist der Pullback F^*g eine PR-Metrik auf G/H , welche Invariant durch die Linkswirkung von G auf G/H ist. Umgekehrt kann man nun mit einer Lie-Gruppe G und einer abgeschlossene Lie-Untergruppe H anfangen und nach einer G -invarianten PR-Metrik auf G/H suchen. Wir sehen daher, dass die Theorie der homogenen PR-Mannigfaltigkeit eine enge Verbindung mit der Theorie der Lie-Gruppen besitzt.

3.5 1-dimensionale PR-Mannigfaltigkeiten und reguläre Kurven

Eine sehr interessante Frage ist zu verstehen, wann eine globale isometrische Immersion $F : (N, g_N) \rightarrow (M, g_M)$ existiert oder zumindest eine lokale Immersion $F : (U, g_N|_U) \rightarrow (M, g_M)$ von einer kleinen Umgebung U von $p \in N$. Eine notwendige Bedingung ist, dass $\sigma_+(g_N) \leq \sigma_+(g_M)$ und $\sigma_-(g_N) \leq \sigma_-(g_M)$. Die Idee ist nun, dass wenn $\sigma_+(g_M) - \sigma_+(g_N)$ (bzw. $\sigma_-(g_M) - \sigma_-(g_N)$) klein bezüglich $\sigma_+(g_N)$ (bzw. $\sigma_-(g_N)$) ist, dann gibt es Hindernisse zu der lokalen Existenz, die durch die intrinsische und extrinsische Krümmung (zum Beispiel, die so-genannte Gauß-Codazzi-Ricci Gleichungen wenn $(M, g_M) = (\mathbb{R}^m, g_{(\sigma_+, \sigma_-)})$) gegeben sind, und zu der globalen Existenz, die durch die Topologie gegeben ist (keine isometrische Immersion von kompakten nichtpositiven gekrümmten Riemannschen Mannigfaltigkeiten als Hyperflächen in den euklidischen Raum).

Wenn dagegen $\sigma_+(g_M) - \sigma_+(g_N)$ und $\sigma_-(g_M) - \sigma_-(g_N)$ groß bezüglich $\sigma_+(g_N)$ und $\sigma_-(g_N)$ sind, dann haben wir genug Platz in M , um N innerhalb M zu aufwickeln.

Das Hauptresultat für lokale analytische Einbettungen in pseudo-euklidischen Raum wurde von Friedman als Verallgemeinerung des Satzes von Janet-Cartan im Riemannschen Fall formuliert.

Satz 3.42 (Friedman). *Es sei (N, g) eine analytische PR-Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann existiert für jedes $p \in N$ eine analytische isometrische Einbettung*

$$F : (U, g|_U) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_1, d_2}, g_{\mathbb{R}^{d_1, d_2}})$$

von einer Umgebung U von p , wenn $d_1 + d_2 = \frac{n(n+1)}{2}$ und $d_1 \geq \sigma_+(g)$, $d_2 \geq \sigma_-(g)$.

Das Hauptresultat für globale Einbettungen im Riemannschen Fall wurde von Nash bewiesen.

Satz 3.43 (Satz der glatten globalen isometrischen Einbettung von Nash). *Es sei (N, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann existiert eine isometrische Einbettung $F : (N, g) \rightarrow (\mathbb{R}^d, g_{\mathbb{R}^d})$, wobei $d = \max\{\frac{n(n+5)}{2}, \frac{n(n+3)}{2} + 5\}$.*

Wir wollen nun die Existenz von isometrischen Immersionen $(N, g_N) \rightarrow (M, g_M)$ für den Fall $\dim N = 1$ untersuchen.

Satz 3.44. *Es sei g eine PR-Metrik auf einem Intervall (t_0, t_1) . Es existiert ein Diffeomorphismus $F : (s_0, s_1) \rightarrow (t_0, t_1)$, sodass $F^*g = \pm ds^2$. Wenn $\tilde{F} : (\tilde{s}_0, \tilde{s}_1) \rightarrow (t_0, t_1)$ ein weiterer Diffeomorphismus mit dieser Eigenschaft ist. Dann ist $\tilde{F}^{-1} \circ F(s) = \pm s + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob F und \tilde{F} orientierungserhaltend oder umkehrend sind.*

*Es sei weiter g eine PR-Metrik auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Dann existiert $a > 0$ und ein Diffeomorphismus $F : \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, sodass $F^*g = \pm ds^2$. Der Diffeomorphismus ist bis auf eine Verschiebung oder Spiegelung von $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ eindeutig.*

Beweis. Wir betrachten hier nur den Riemannschen Fall. Es existiert $h : (t_0, t_1) \rightarrow (0, \infty)$, sodass $g = h^2 dt^2 = (h dt)^2$. Die intuitive Idee ist eine Funktion s zu finden, sodass $ds = h dt$, also $h = \frac{ds}{dt}$. Wir nehmen $t_2 \in (t_0, t_1)$ und definieren

$$s : (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) = \int_{t_2}^t h(t') dt'.$$

Dann gilt $\frac{ds}{dt} = h > 0$, sodass s ein Diffeomorphismus auf das Bild ist. Nun $s^*g_{\text{euk}} = (\frac{ds}{dt})^2 dt^2 = h^2 dt^2 = g$. Dann setzen wir $F = s^{-1}$. Wenn \tilde{F} eine weitere Abbildung mit $\tilde{F}^*g = d\tilde{s}^2$ ist, dann gilt $\sigma^*d\tilde{s}^2 = ds^2$, wobei $\sigma := \tilde{F}^{-1} \circ F$. Wir wissen aber, dass $\sigma^*d\tilde{s}^2 = (\frac{d\sigma}{ds})^2 ds^2$. Daher gilt $\frac{d\sigma}{ds} = 1$ oder $\frac{d\sigma}{ds} = -1$. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind genau die Funktionen $\pm s + c$.

Es sei nun g eine R-Metrik auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Wir betrachten den Pullback π^*g durch $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Es existiert dann $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, sodass $\pi^*g = h^2 dt^2$. Die Funktion h ist 1-periodisch (warum?) und wir setzen $a := \int_0^1 h(t) dt$. Wir definieren

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) = \int_0^t h(t') dt'.$$

Dann ist s ein monoton wachsender Diffeomorphismus mit $s(t+1) = s(t) + a$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wegen der Periodizität von h und der Definition von a . Wir bekommen einen Diffeomorphismus $\bar{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ im Quotienten. Wie der Beweis weiter geht, sollte nun klar sein. \square

Bemerkung 3.45. Der obige Satz zeigt, dass alle PR-Metriken auf 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten lokal isometrisch zu $\pm g_{\mathbb{R}}$ sind. Global unterscheiden sich die Metriken auf offenen Intervallen in drei Fällen:

- $s_0 = -\infty$ und $s_1 = +\infty$;
- $s_0 = -\infty$ und s_1 endlich oder s_0 endlich und $s_1 = +\infty$;
- s_0 und s_1 endlich. Hier wird die Metrik von der gesamten Länge $a := s_1 - s_0$ bis auf Isometrien bestimmt.

Für eine Metrik auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} ist die gesamte Länge a die einzige globale Invariante. \triangle

Wir können nun Satz 3.44 benutzen, um den Fall von Kurven in PR-Mannigfaltigkeiten betrachten.

Satz 3.46. *Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und $\gamma : (t_0, t_1) \rightarrow$ eine raumartige oder zeitartige Kurve. Dann existiert eine orientierungserhaltende Umparametrisierung $\varphi : (s_0, s_1) \rightarrow (t_0, t_1)$, sodass $g(\dot{\delta}, \dot{\delta}) = \pm 1$, wobei $\delta = \gamma \circ \varphi$. Also $\delta^*g = \pm(ds)^2$. Wenn $\tilde{\varphi}$ eine weitere Umparametrisierung mit dieser Eigenschaft ist, dann $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi(s) = s + c$.*

Beweis. Da γ raumartig oder zeitartig ist, ist γ^*g eine PR-Metrik auf (t_0, t_1) . Wir wenden Satz 3.44 an und finden eine Umparametrisierung $\varphi : (s_0, s_1) \rightarrow (t_0, t_1)$ mit $\pm ds^2 = \varphi^*(\gamma^*g) = (\gamma \circ \varphi)^*g$. Wir setzen $\delta = \gamma \circ \varphi$. Nach Definition des Pullbacks gilt $\delta^*g = g(\dot{\delta}, \dot{\delta})ds^2$. Es folgt, dass $g(\dot{\delta}, \dot{\delta}) = \pm 1$. \square

Wir geben dann die folgende Definition für Kurven in Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Definition 3.47. Eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow (M, g)$ hat konstante Geschwindigkeit, wenn $|\dot{\gamma}|$ ist konstant. Wenn $|\dot{\gamma}| \equiv 1$ gilt, sagen wir genauer, dass γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. \triangle

Folgerung 3.48. *Jede stückweise Immersion $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow (M, g)$ besitzt eine orientierungserhaltende Parametrisierung $\delta : [s_0, s_1] \rightarrow (M, g)$ nach der Bogenlänge. Diese Parametrisierung ist eindeutig bis auf Verschiebung des Definitionsintervalles. Insbesondere gibt es eine eindeutige Parametrisierung $\epsilon : [t_0, t_1] \rightarrow (M, g)$ mit konstanter Geschwindigkeit.* \square

3.6 Verzernte Produkte

Es seien (M, g_M) und (N, g_N) zwei PR-Mannigfaltigkeiten. Wir wollen nun eine Metrik auf dem Produkt $M \times N$ definieren. Wir erinnern uns daran, dass

$$T(M \times N) \cong \mathcal{P}_{\pi_1}(TM) \oplus \mathcal{P}_{\pi_2}(TN),$$

wobei $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ und $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ die kanonischen Projektionen sind. Anders gesagt gilt

$$T_{(p,q)}M \times N \cong T_pM \oplus T_qN, \quad \forall (p, q) \in M \times N.$$

Definition 3.49. Das Produkt der PR-Mannigfaltigkeiten (M, g_M) und (N, g_N) ist

$$(M \times N, g_M + g_N), \quad g_M + g_N := \mathcal{P}_{\pi_1}(g_M) \oplus \mathcal{P}_{\pi_2}(g_N).$$

Das verzerrte Produkt von (M, g_M) und (N, g_N) mit Basis M und verzerrende Funktion $\lambda : M \rightarrow (0, \infty)$ ist

$$(M \times N, g_M + \lambda^2 g_N), \quad g_M + \lambda^2 g_N := \mathcal{P}_{\pi_1}(g_M) \oplus ((\lambda \circ \pi_1)^2 \mathcal{P}_{\pi_2}(g_N)).$$

Also stehen alle Untermannigfaltigkeiten $M \times \{q\}$ und $\{p\} \times N$ orthogonal zueinander. Die Einschränkung von $g_M + \lambda^2 g_N$ auf $M \times \{q\}$ ist gleich g_M während die Einschränkung auf $\{p\} \times N$ ist die skalierte Metrik $\lambda^2(p)g_N$. \triangle

Beispiel 3.50. Der flache Raum $(\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$ ist das Produkt von $(\mathbb{R}^{\sigma_{1,+}, \sigma_{1,-}}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_{1,+}, \sigma_{1,-}}})$ und $(\mathbb{R}^{\sigma_{2,+}, \sigma_{2,-}}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_{2,+}, \sigma_{2,-}}})$, wobei $\sigma_+ = \sigma_{1,+} + \sigma_{2,+}$ und $\sigma_- = \sigma_{1,-} + \sigma_{2,-}$. \triangle

Beispiel 3.51. Es sei $\gamma = (r, z) : (a, b) \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine Kurve mit $|\dot{\gamma}(\theta)|_{\text{euk}} \equiv 1$. Wir betrachten die von γ erzeugte Revolutionsfläche $\Gamma : (a, b) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Gamma(\theta, \phi) = ((\cos \phi) \cdot r(\theta), (\sin \phi) \cdot r(\theta), z(\theta)), \quad \forall (\theta, \phi) \in (a, b) \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$$

Wir betrachten die Riemannsche Metrik $\Gamma^* g_{\text{euk}}$ auf $(a, b) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\Gamma^* g_{\text{euk}} = d\theta^2 + r(\theta)^2 d\phi^2.$$

Also ist $((a, b) \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, \Gamma^* g_{\text{euk}})$ das verzerrte Produkt zwischen $((a, b), d\theta^2)$ und $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, d\phi^2)$ mit Basis (a, b) und verzerrende Funktion r . \triangle

Beispiel 3.52. Im Beispiel 3.50 haben wir $\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}$ als Produkt betrachtet. Wir können aber auch $\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}$ als verzerrtes Produkt auf bestimmten offenen Mengen schreiben. Wir setzen $N_{\pm} := Q_{(\sigma_+, \sigma_-)}^{-1}(\pm 1)$, wobei $Q_{(\sigma_+, \sigma_-)} : \mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-} \rightarrow \mathbb{R}$ die zu $g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}$ assoziierte quadratische Form darstellt. Wir setzen $\mathbb{R}_{\pm}^{\sigma_+, \sigma_-} := \{\pm Q_{(\sigma_+, \sigma_-)} > 0\}$ und betrachten den Diffeomorphismus

$$F : (0, \infty) \times N_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}_{\pm}^{\sigma_+, \sigma_-}, \quad F(r, p) = r \cdot p.$$

Dann gilt

$$F^* g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}} = \pm dr^2 + r^2 g_{N_{\pm}},$$

wobei $g_{N_{\pm}}$ die Einschränkung von $g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}$ auf N_{\pm} ist. \triangle

Beispiel 3.53. Im Blatt 2 sehen wir, dass auch die R-Mannigfaltigkeiten $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g_{\mathbb{R}^n})$, $(S_r^n \setminus \{re_{n+1}, -re_{n+1}\}, g_{S_r^n})$ und $(H_r^n \setminus \{re_{n+1}\}, g_{H_r^n})$ als verzerrtes Produkt durch Polarkoordinaten geschrieben werden können. \triangle

Beispiel 3.54. Es sei $S_r^{n-1}(p) \subset \mathbb{R}^n$ die euklidische Sphäre mit Radius r und Mittelpunkt p . Wir definieren die Inversion $\sigma : (\mathbb{R}^n \setminus \{p\}, g_{\mathbb{R}^n}) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{p\}, g_{\mathbb{R}^n})$ an der Sphäre $S_r^{n-1}(p)$ wie folgt. Für $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ ist $\sigma(q)$ der einzige Punkt auf der Halbgerade mit Ursprung p und Richtung $q - p$, sodass $|q - p| \cdot |\sigma(q) - p| = r^2$. Schreiben Sie σ in Polarkoordinaten um p und zeigen Sie, dass σ konform ist.

Im Beispiel 3.10 haben wir viele konforme Abbildungen $\sigma : (U, g_{\mathbb{R}^n}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $n = 2$ konstruiert. Ein Satz von Liouville (siehe Theorem 5.2 in [do Carmo, Riemannian Geometry]) dagegen besagt, dass für $n > 2$ die einzige konforme Abbildungen Verkettungen von Streckungen, Isometrien und Inversionen sind. \triangle

3.7 PR-Submersionen

Verzerrte Produkte sind einfache Beispiele von PR-Submersionen, die wir als dual von PR-Immersionen betrachten können. Bevor wir die Definition geben, erinnern wir uns daran, dass wenn $F : M \rightarrow N$ eine Submersion ist, dann haben wir die vertikale Distribution $p \mapsto \mathcal{V}_p := \ker d_p F = T_p F^{-1}(q)$, wobei $q = F(p)$ gilt. Wenn nun g_M eine PR-Metrik auf M ist, sodass für alle $q \in N$ die Faser $F^{-1}(q)$ PR-Untermannigfaltigkeiten sind, dann können wir die horizontale Distribution $\mathcal{H} := \mathcal{V}^\perp$ definieren, sodass $TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ gilt und $d_p F|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{F(p)}N$ ein linearer Isomorphismus für alle $p \in M$ ist.

Definition 3.55. Eine Submersion $F : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ zwischen PR-Mannigfaltigkeiten heißt PR-Submersion, falls

1. für alle $q \in N$ die Faser $F^{-1}(q)$ PR-Untermannigfaltigkeiten sind,
2. für alle $p \in M$ die Einschränkung $d_p F|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{F(p)}N$ eine lineare Isometrie zwischen $g_M|_{\mathcal{H}_p}$ und $g_N|_{T_{F(p)}N}$ ist:

$$g_M(v_1, v_2) = g_N(d_p F \cdot v_1, d_p F \cdot v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{H}_p. \quad \triangle$$

Bemerkung 3.56. Lokale Isometrien sind PR-Submersionen. Ein verzerrtes Produkt gibt uns eine PR-Submersion durch die kanonische Projektion $(M \times N, g_M + \lambda^2 g_N) \rightarrow (M, g_M)$. \triangle

Um PR-Submersionen zu konstruieren, brauchen wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz 3.57. Es sei $F : M \rightarrow N$ eine Submersion und g eine PR-Metrik auf M , sodass alle Fasern von F PR-Untermannigfaltigkeiten sind. Dann existiert für alle Vektorfelder X auf N eindeutig einen Schnitt $X^{\mathcal{H}}$ von \mathcal{H} , welcher F -verwandt mit X ist: $dF \cdot X^{\mathcal{H}} = X$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Wenn $X_1^{\mathcal{H}}$ und $X_2^{\mathcal{H}}$ die gewünschte Eigenschaft haben, gilt $X_1^{\mathcal{H}}(p) = (d_p F|_{\mathcal{H}_p})^{-1} X(F(p)) = X_2^{\mathcal{H}}(p)$. Um die Existenz zu zeigen, müssen wir beweisen, dass $X^{\mathcal{H}}(p) := (d_p F|_{\mathcal{H}_p})^{-1} X(F(p))$ glatt ist. Wir behaupten, dass ein glattes Vektorfeld \tilde{X} auf einer Umgebung U_M von p existiert, welches F -verwandt mit $X|_{F(U_M)}$

ist. Wenn das stimmt, betrachten wir die glatte Zerlegung $\tilde{X} = \tilde{X}^\nu + \tilde{X}^\mathcal{H}$ im vertikalen und horizontalen Teil. Dann:

$$X|_{F(U_M)} = dF \cdot \tilde{X} = dF \cdot (\tilde{X}^\nu + \tilde{X}^\mathcal{H}) = 0 + dF \cdot \tilde{X}^\mathcal{H}.$$

Es folgt, dass $X^\mathcal{H}|_{U_M} = \tilde{X}^\mathcal{H}$ glatt ist. Wir beweisen nun die Behauptung. Da F eine Submersion ist, existieren Karten $(x, y) : U_M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ von M um p und $z : F(U_M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ von N um $F(p)$, sodass wir die Koordinatendarstellung $F(x, y) = x$ haben. Es existieren dann glatte Funktionen $X^1, \dots, X^n : F(U_M) \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $X = \sum_i X^i \partial_{z^i}$. Das Vektorfeld $\tilde{X} = \sum_i (X^i \circ F) \partial_{x^i}$ besitzt dann die gewünschte Eigenschaft:

$$d_p F \cdot \tilde{X}(p) = \sum_i X^i(F(p)) d_p F \cdot \partial_{x^i}|_p = \sum_i X^i(F(p)) \partial_{z^i}|_{F(p)} = X(F(p)). \quad \square$$

Wir wissen aus der Differentialgeometrie 1, dass Submersionen durch Quotienten von Gruppenwirkungen entstehen können. Wir haben auf dieser Weise die Submersionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / (\mathbb{K} \setminus \{0\})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ definiert. Hier wirkt \mathbb{Z}^n auf \mathbb{R}^n durch Verschiebungen und $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ auf $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch Skalarmultiplikation.

Die Idee ist nun, dass wenn die Gruppe durch Isometrien einer Riemannschen Metrik wirkt, dann können wir diese Metrik auf den Quotienten verschieben. Während \mathbb{Z}^n eine Untergruppe von $\text{Iso}(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ ist, ist $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ keine Untergruppe von $\text{Iso}(\mathbb{K}^n, g_{\mathbb{K}^n})$. Zu diesem Zweck betrachten wir die alternativen Submersionen (warum sind dies Submersionen?)

$$S^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n = S^n / S^0, \quad S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n = S^{2n+1} / S^1,$$

wobei $S^0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die von der antipodalen Abbildung $p \mapsto -p$ erzeugte Gruppe ist und S^1 die von der komplexen Skalarmultiplikation $S^1 \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$, $(\lambda, p) \rightarrow \lambda \cdot p$, erzeugte Gruppe ist (hier betrachten wir $S^1 \subset \mathbb{C}$ und $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$). Nun ist S^0 eine Untergruppe von $\text{Iso}(S^n, g_{S^n})$ und S^1 eine Untergruppe von $\text{Iso}(S^{2n+1}, g_{S^{2n+1}})$. Wir sind nun motiviert das folgende Resultat zu beweisen.

Satz 3.58. *Es sei (M, g_M) eine PR-Mannigfaltigkeit und $\pi : M \rightarrow N$ eine Submersion, deren Fasern PR-Untermannigfaltigkeiten sind. Es sei G eine Untergruppe von $\text{Iso}(M, g_M)$, sodass*

(a) $\pi \circ \gamma = \pi$ für alle $\gamma \in G$ gilt;

(b) für alle $p_1, p_2 \in M$ mit $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ ein $\gamma \in G$ mit $\gamma \cdot p_1 = p_2$ existiert.

Dann gibt es eine PR-Metrik g_N auf N , sodass $\pi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ eine PR-Submersion ist.

Beweis. Für $q \in N$ setzen wir

$$(g_N)_q := ((d_p \pi|_{\mathcal{H}_p})^{-1})^* g|_{\mathcal{H}_p}.$$

Wir behaupten, dass die Definition nicht von p abhängt. Es sei $p' \in \pi^{-1}(q)$. Nach Voraussetzung existiert $\gamma \in G$ mit $\gamma(p) = p'$ und $\pi \circ \gamma = \pi$. Wir nehmen das Differential davon und bekommen

$$d_{p'}\pi \cdot d_p\gamma = d_p\pi. \quad (3.6)$$

Daher gilt $d_p\gamma(\mathcal{V}_p) = \mathcal{V}_{p'}$. Da γ eine Isometrie ist, folgt, dass $d_p\gamma(\mathcal{H}_p) = \mathcal{H}_{p'}$ und $(d_p\gamma)^*g|_{\mathcal{H}_{p'}} = g|_{\mathcal{H}_p}$ gilt. Wir schließen aus (3.6) auf die Identität $d_p\pi|_{\mathcal{H}_p} = d_{p'}\pi|_{\mathcal{H}_{p'}} \cdot d_p\gamma|_{\mathcal{H}_p}$, sodass

$$\begin{aligned} ((d_p\pi|_{\mathcal{H}_p})^{-1})^*g|_{\mathcal{H}_p} &= (d_p\gamma|_{\mathcal{H}_p}^{-1} \cdot d_{p'}\pi|_{\mathcal{H}_{p'}}^{-1})^*g|_{\mathcal{H}_p} = (d_{p'}\pi|_{\mathcal{H}_{p'}}^{-1})^*(d_p\gamma|_{\mathcal{H}_p}^{-1})^*g|_{\mathcal{H}_p} \\ &= (d_{p'}\pi|_{\mathcal{H}_{p'}}^{-1})^*g|_{\mathcal{H}_{p'}}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass g_N um $q \in N$ glatt ist. Zu diesem Zweck nehmen wir einen Rahmen e_1, \dots, e_n auf einer Umgebung U von q und betrachten die horizontalen Hochhebungen $e_1^{\mathcal{H}}, \dots, e_n^{\mathcal{H}}$. Wenn U klein genug ist, existiert ein lokaler Schnitt von π über U . Das ist eine Einbettung $\sigma : U \rightarrow M$, sodass $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$. Dann sind die Funktionen

$$(g_N)_{ij} = (g_N)_{q'}(e_i, e_j) = (g_M)_{\sigma(q')}(e_i^{\mathcal{H}}, e_j^{\mathcal{H}})$$

glatt für alle $i, j = 1, \dots, n$ und daher ist auch $g_N = \sum_{i,j} (g_N)_{ij} e^i \otimes e^j$ glatt. \square

Folgerung 3.59. *Es gibt Metriken auf $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, sodass die Quotientenabbildungen $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}) \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $(S^n, g_{S^n}) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ und $(S^{2n-1}, g_{S^{2n-1}}) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ Riemannsche Submersionen sind.* \square

Bemerkung 3.60. Die Metrik $g_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}$ auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, für die $(S^{2n-1}, g_{S^{2n-1}}) \rightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}^n, g_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n})$ eine PR-Submersion ist, heißt Fubini-Study Metrik. Sie spielt eine wichtige Rolle in der komplexen und Kähler Geometrie. \triangle

3.8 Quotienten

Ein wichtiges Beispiel, wobei eine Untergruppe G von $\text{Iso}(M, g_M)$ die Bedingungen (a) und (b) im Satz 3.58 erfüllt, ist wenn N der Quotient der Wirkung von G auf M ist, sodass $\pi : M \rightarrow M/G$ die Quotientenabbildung ist. In diesem Fall muss man aber etwas von der Wirkung von G verlangen, weil sonst der Quotient nicht Hausdorffsch ist und auch keine glatte Struktur besitzt.

Definition 3.61. Es sei $G \times M \rightarrow M$, $(\gamma, p) \mapsto \gamma \cdot p$ eine glatte Linkswirkung einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M . Die Linkswirkung ist

- (a) frei, wenn für alle $(\gamma, p) \in G \times M$ die Implikation $\gamma \cdot p = p \Rightarrow \gamma = \text{id}$ gilt;
- (b) eigentlich, wenn die Abbildung

$$\lambda : G \times M \rightarrow M \times M, \quad (\gamma, p) \mapsto (\gamma \cdot p, p)$$

eigentlich im topologischen Sinn ist. Das heißt: Urbilder von kompakten Mengen sind kompakt. \triangle

Bemerkung 3.62. Wir behaupten, dass die Wirkung automatisch eigentlich ist, wenn G kompakt ist. Es sei dafür $K \subset M \times M$ kompakt, dann $\lambda^{-1}(K) \subset G \times \pi_2(K)$, wobei $\pi_2 : M \times M \rightarrow M$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist. Dann ist $G \times \pi_2(K)$ und daher $\lambda^{-1}(K)$ kompakt. \triangle

Bemerkung 3.63. Es sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe. Dann ist $H \times G \rightarrow G$, $(h, \gamma) \rightarrow h \cdot \gamma$ eine freie Linkswirkung. Wir behaupten, dass die Wirkung auch eigentlich ist, falls H abgeschlossen ist. Es sei dafür $K \subset G \times G$ kompakt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $K = K_1 \times K_2$ für $K_1, K_2 \subset G$ kompakt (warum?). Es sei $(h, \gamma) \in \lambda^{-1}(K_1 \times K_2)$. Dann $\gamma \in K_2$ und $h \cdot \gamma \in K_1$. Es folgt, dass $h \in K_1 \cdot K_2^{-1}$. Als Bild der kompakten Teilmenge $K_1 \times K_2^{-1}$ durch die Gruppenverknüpfung $G \times G \rightarrow G$ ist die Menge $K_1 \cdot K_2^{-1}$ kompakt in G . Da H abgeschlossen in G ist, ist $(H \cap (K_1 \times K_2^{-1}))$ kompakt in H . Dann gilt $\lambda^{-1}(K_1 \times K_2) \subset (H \cap (K_1 \times K_2^{-1})) \times K_2$ und deshalb ist $\lambda^{-1}(K_1 \times K_2)$ kompakt wie gewünscht. \triangle

Bemerkung 3.64. Es sei $G \times M \rightarrow M$ eine Linkswirkung einer Gruppe durch Diffeomorphismen, wobei wir noch keine Topologie auf G setzen. Dann erzeugt G mit der diskreten Topologie eine freie und eigentliche Linkswirkung genau dann, wenn die folgenden zwei Eigenschaften gelten:

- (a) jedes $p \in M$ besitzt eine Umgebung U , sodass $(\gamma \cdot U) \cap U = \emptyset$ für $\gamma \neq \text{id}$ gilt;
- (b) für alle $p, p' \in M$, sodass $p' \notin G \cdot p$ gilt, existieren Umgebungen U von p und U' von p' , für die $(\gamma \cdot U) \cap U' = \emptyset$ für alle $\gamma \in G$ gilt.

Ein Beweis davon ist in Theorem 21.11 von [Lee, Introduction to Smooth Manifolds].

Es ist leicht zu sehen, dass alle freien Wirkungen von endlichen Gruppen, Bedingungen

- (a) und (b) erfüllen. \triangle

Wir kommen nun zu dem Hauptsatz über Quotienten durch freie und eigentliche Wirkungen. Wir brauchen dafür die Definition von PR-Überlagerung, eine spezielle Art von surjektiver lokaler Isometrie.

Definition 3.65. Eine PR-Überlagerung $\pi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ ist eine Überlagerung, die auch eine lokale Isometrie ist. \triangle

Satz 3.66. *Es sei (M, g_M) eine PR-Mannigfaltigkeit und es sei $G \times M \rightarrow M$ eine glatte, freie und eigentliche Linkswirkung einer Lie-Gruppe G auf M durch Isometrien von g_M . Dann gilt:*

- (a) M/G ist eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : M \rightarrow M/G$ eine glatte Submersion;
- (b) falls die Fasern von π PR-Untermannigfaltigkeiten sind, dann existiert eindeutig eine PR-Metrik $g_{M/G}$ auf M/G , sodass $\pi : (M, g_M) \rightarrow (M, g_{M/G})$ eine PR-Submersion ist.
- (c) falls G die diskrete Topologie besitzt, ist die Submersion eine normale PR-Überlagerung mit Deckgruppe $G = G(\pi)$.

Beweis. Der Beweis von (a) ist Theorem 21.10 in (Lee, Introduction to smooth manifolds). Punkt (b) folgt nun aus Satz 3.58. Ohne Annahme von Punkt (a) werden wir im Blatt 3 mittels Bemerkung 3.64 zeigen, dass π eine PR-Überlagerung ist mit $G \subset G(\pi)$. Die Inklusion $G(\pi) \subset G$ folgt nun aus der Transitivität der Wirkung von G auf jeder Faser und die Tatsache, dass Decktransformationen durch ihren Wert in einem Punkt völlig bestimmt werden. \square

Beispiel 3.67. Nach Satz 3.66 und Bemerkung 3.64 ist es leicht zu prüfen (und eigentlich haben wir es schon in DG1 heimlich gemacht), dass $(S^n, g_{S^n}) \rightarrow (\mathbb{R}P^n, g_{\mathbb{R}P^n})$ und $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, g_{\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n})$ PR-Überlagerungen sind. \triangle

Beispiel 3.68. Die Überlagerung $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ ist äquivalent zu der Überlagerung $SU(2) \rightarrow SO(3)$, die eine wichtige Rolle in der Physik spielt. Wir haben nämlich den Diffeomorphismus

$$S^3 \cong SU(2) := \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Mit dieser Identifikation ist $\mathbb{R}P^3$ der Quotient von $SU(2)$ durch die Untergruppe $\{\pm \text{id}\} \subset SU(2)$. Wir bemerken nun, dass $SU(2)/\{\pm \text{id}\}$ Diffeomorph zu $SO(3)$ ist. Wir betrachten

$$\mathbb{R}^3 \cong M := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{z} \\ z & a \end{pmatrix} \mid (a, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \right\}.$$

Dann für alle $A \in SU(2)$ bekommen wir $F(A) : M \rightarrow M$ mittels $F(A)(B) = ABA^{-1}$. Durch die Identifizierung $\mathbb{R}^3 \cong M$ gilt $F(A) \in SO(3)$. Dann $F : SU(2) \rightarrow SO(3)$ ist ein glatter Homomorphismus mit $\ker F = \{\pm \text{id}\}$ und $F(SU(2)) = SO(3)$. Es folgt, dass die Quotientenabbildung $\bar{F} : SU(2)/\{\pm \text{id}\} \rightarrow SO(3)$ ein Diffeomorphismus ist. \triangle

Beispiel 3.69. Wir können Quotienten von \mathbb{R}^n mit diskreten Gruppen von Verschiebungen nehmen, die verschieden von $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ sind. Ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist eine additive Untergruppe von \mathbb{R}^n , welche von einer Basis von \mathbb{R}^n aufgespannt ist. Dann genügt die Wirkung von Γ auf \mathbb{R}^n durch Verschiebungen den Bedingungen in Bemerkung 3.64, da ein linearer Isomorphismus $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $A(\mathbb{Z}^n) = \Gamma$ existiert.

Nach Satz 3.66 ist $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$ eine normale PR-Überlagerung. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^n/Γ ist wieder diffeomorph zum Torus mittels der Quotientenabbildung $\bar{A} : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$ und lokal isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$. Zwei solche Tori \mathbb{R}/Γ_1 und \mathbb{R}/Γ_2 sind aber nicht unbedingt isometrisch. Das passiert genau dann, wenn $A \in O(n)$ existiert mit $\Gamma_2 = A(\Gamma_1)$, siehe Theorem 2.23 in (Gallot–Hulin–Lafontaine, Riemannian Geometry) und Blatt 3. \triangle

Bemerkung 3.70. Nicht alle surjektiven lokalen Isometrien sind PR-Überlagerungen. Man kann zum Beispiel $((0, 3/2), g_{\mathbb{R}^1}) \rightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, g_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}})$, $p \mapsto p + \mathbb{Z}$ nehmen. \triangle

Bemerkung 3.71. Es seien $\mathfrak{p}_1 : (\tilde{M}_1, \tilde{g}_1) \rightarrow (M_1, g_1)$ und $\mathfrak{p}_2 : (\tilde{M}_2, \tilde{g}_2) \rightarrow (M_2, g_2)$ PR-Überlagerungen. Es sei $F : M_1 \rightarrow M_2$ eine glatte Abbildung. Es sei angenommen, dass F eine glatte Hochhebung $\tilde{F} : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$ besitzt. Eine stetige Hochhebung mit $\tilde{F}(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_2$

existiert genau dann, wenn $(F \circ \mathbf{p}_1)_*(\pi_1(\tilde{M}_1, \tilde{p}_1)) \subset (\mathbf{p}_2)_*\pi_1(\tilde{M}_2, \tilde{p}_2)$. Da \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 lokale Diffeomorphismen sind, ist die Hochhebung auch glatt.

Wir behaupten, dass

$$F^*g_2 = g_1 \iff \tilde{F}^*\tilde{g}_2 = \tilde{g}_1.$$

Wir haben $\tilde{F}^*\tilde{g}_2 = \tilde{F}^*\mathbf{p}_2^*g_2 = \mathbf{p}_1^*F^*g_2$. Wenn $F^*g_2 = g_1$ gilt, folgt es, dass $\tilde{F}^*\tilde{g}_2 = \mathbf{p}_1^*g_1 = \tilde{g}_1$. Wenn andersrum $\tilde{F}^*\tilde{g}_2 = \tilde{g}_1$, dann folgt $\tilde{g}_1 = \mathbf{p}_1^*(F^*g_2)$. Da g_1 das einzige Tensorfeld auf M_1 ist, für das $\tilde{g}_1 = \mathbf{p}_1^*g_1$ gilt, finden wir, dass $F^*g_2 = g_1$. \triangle

Bemerkung 3.72. Wir können die obige Bemerkung an $\tilde{F} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ in der Deckgruppe $G(\mathbf{p})$ einer PR-Überlagerung $\mathbf{p} : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ anwenden. Da F eine Hochhebung von $\text{id}_M \in \text{Iso}(M, g)$ ist, folgt es, dass $F \in \text{Iso}(\tilde{M}, \tilde{g})$. Wir behaupten, dass $G(\mathbf{p})$ frei und eigentlich wirkt. Dafür betrachten wir eine offene Menge $W \subset M$, sodass $\pi^{-1}(W) = \sqcup_{i \in I} U_i$ mit $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow W$ Diffeomorphismus. Dann für alle $i \in I$ und $\gamma \in G(\mathbf{p})$ existiert $i_\gamma \in I$, sodass $\gamma : U_i \rightarrow U_{i_\gamma}$ ein Diffeomorphismus ist. Mit dieser Information ist einfach zu beweisen, dass die Bedingungen in Bemerkung 3.64 gelten.

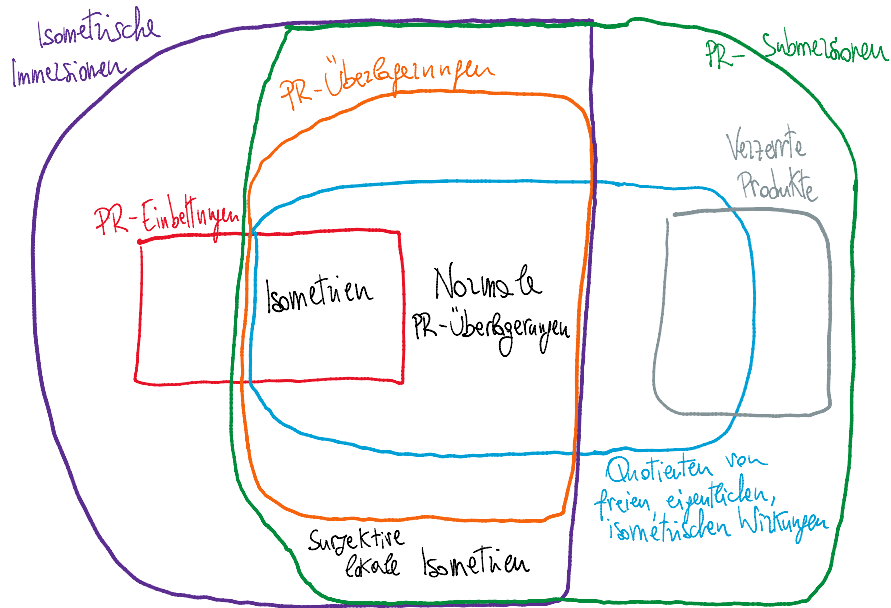
Dann bekommen wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{M}, \tilde{g}) & \longrightarrow & (\tilde{M}/G(\mathbf{p}), \tilde{g}) \\ \mathbf{p} \downarrow & \nearrow \bar{\mathbf{p}} & \\ (M, g) & & \end{array}$$

Die Abbildung $\bar{\mathbf{p}}$ ist eine surjektive lokale Isometrie. Sie ist injektiv (und daher eine Isometrie) genau dann, wenn \mathbf{p} normal ist. Das heißt: $G(\mathbf{p})$ wirkt transitiv auf jeder \mathbf{p} -Faser. \triangle

Bemerkung 3.73. Es sei eine PR-Mannigfaltigkeit (M, g) gegeben. Wir wollen nun PR-Überlagerungen $\mathbf{p} : (\tilde{M}, \mathbf{p}^*g) \rightarrow (M, g)$ definieren, \tilde{M} ein topologischer Raum und $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine topologische Überlagerung. Nach Proposition 4.40 von (Lee, Introduction to smooth manifolds) gibt es eine eindeutige glatte Struktur auf M , sodass $\mathbf{p} : \tilde{M} \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Es folgt, dass $\mathbf{p} : (\tilde{M}, \mathbf{p}^*g) \rightarrow (M, g)$ eine PR-Überlagerung ist. \triangle

Um diesen Kapitel über Konstruktionen von PR-Mannigfaltigkeiten abzuschließen, malen wir eine Skizze der verschiedenen Arten von Abbildungen zwischen solchen Räumen. Die in schwarz geschriebenen Mengen entstehen als Schnittmengen der in Farben geschriebenen Mengen. Zum Beispiel sind surjektive lokale Isometrien gleichzeitig isometrische Immersionen und PR-Submersionen.



Die verschiedenen Arten von Abbildungen zwischen PR-Mannigfaltigkeiten.

4 Geodätische

Wir kommen nun zu der Existenz von minimierenden Kurven in Riemannschen Mannigfaltigkeiten zurück. Wir haben gesehen, dass die minimierenden Kurven im euklidischen Raum die Geradenstücke sind. Die Parametrisierung von konstanter Geschwindigkeit eines Geradenstückes zwischen p und q in \mathbb{R}^n ist durch $t \mapsto \gamma(t) = p + t \cdot v$ mit $v := q - p$ und $t \in [0, 1]$ gegeben. Also sind Geradenstücke auch die einzigen Kurven, deren Parametrisierung mit konstanter Geschwindigkeit der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0$$

genügt. Also hat γ einen konstanten Geschwindigkeitsvektor.

Wir wollen nun eine solche Gleichung auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten definieren. Zu diesem Zweck bemerken wir, dass $\dot{\gamma}$ ein Vektorfeld entlang γ ist. Das heißt, dass $\dot{\gamma}$ ein Schnitt des Pullbackbündels $\gamma^* T\mathbb{R}^n$ ist. Wir haben auf $T\mathbb{R}^n$ die triviale kovariante Ableitung $\nabla(\sum_i X^i \partial_{x_i}) := \sum_i dX^i \otimes \partial_{x_i}$. Dann gilt nach Definition der Pullback kovariante Ableitung $\gamma^* \nabla$

$$\gamma^* \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = \sum_i \ddot{\gamma}^i(t) \partial_{x_i} \circ \gamma.$$

Also ist die obige Gleichung äquivalent zu

$$\gamma^* \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = 0. \quad (4.1)$$

Die Gleichung sagt uns, dass der Geschwindigkeitsvektor ein paralleles Vektorfeld entlang γ ist und ergibt Sinn auf allen Riemannschen-Mannigfaltigkeiten (M, g) , sobald wir eine kovariante Ableitung ∇ festlegen.

Wir wissen aber, dass es eine Fülle kovarianter Ableitungen auf einem Vektorbündel gibt. Wir werden dagegen im Satz 4.48 sehen, dass nur für eine bestimmte kovariante Ableitung auf TM , die sogenannte Levi-Civita Ableitung, die Lösungen von (4.1) genau die lokal minimierenden Kurven mit konstanter Geschwindigkeit sind.

Definition 4.1. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine stückweise Immersion $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ heißt lokal minimierend, wenn für alle $t \in [t_0, t_1]$ ein Intervall $(t - \epsilon, t + \epsilon)$ um t existiert, sodass

$$d_g(\gamma(s), \gamma(s')) = L_g(\gamma|_{[s, s']}), \quad \forall s, s' \in (t - \epsilon, t + \epsilon), \quad s < s'. \quad (4.2)$$

△

Bemerkung 4.2. Lokal minimierend zu sein ist eine Eigenschaft, die nicht von der Parametrisierung abhängt. Außerdem ist sie äquivalent zur folgenden Bedingung: für alle $t \in [t_0, t_1]$ existieren $s, s' \in [t_0, t_1]$, sodass $\gamma|_{[s, s']}$ minimierend ist, wobei $s < t < s'$, falls $t \in (t_0, t_1)$, $s = t < s'$, falls $t = t_0$ und $s < t = s'$ falls $t = t_1$. △

Bemerkung 4.3. Wir haben hier vorausgesetzt, dass γ eine stückweise Immersion ist, weil schon in $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ stückweise glatte Kurven existieren, für die (4.2) gilt aber sie sind nicht orientierungserhaltende Reparametrisierungen von einem Geradenstück. Man nehme zum Beispiel $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \in [0, 1], \\ 1 & \text{für } t \in [1, 2], \\ 3 - t & \text{für } t \in [2, 3]. \end{cases} \quad \triangle$$

Die Levi-Civita Ableitung wird durch zwei Eigenschaften bestimmt: die Erhaltung der Metrik g und die Symmetrie.

4.1 Kovariante Ableitungen auf pseudoorthogonalen Bündeln

Definition 4.4. Es sei (E, g) ein pseudoorthogonales Vektorbündel. Wir schreiben $\text{kA}(E, g)$ für die Menge der kovarianten Ableitungen ∇ , welche die Metrik g erhalten. Diese haben die Eigenschaft

$$\nabla g = 0 \in \Gamma(T^*M \otimes E^* \otimes E^*),$$

wobei ∇ die induzierte kovariante Ableitung auf $E^* \otimes E^*$ aus Satz 9.44 von DG1 ist. △

Hilfssatz 4.5. Es gilt $\nabla \in \text{kA}(E, g)$ genau dann, wenn

$$d(g(e_1, e_2)) = g(\nabla e_1, e_2) + g(e_1, \nabla e_2), \quad \forall e_1, e_2 \in \Gamma(E). \quad (4.3)$$

Wenn $\nabla^1, \nabla^2 \in \mathfrak{kA}(E, g)$ sind, dann ist die Differenz $\nabla^2 - \nabla^1 \in \Gamma(T^*M \otimes \text{End}_g(E))$. Hier bezeichnet $\text{End}_g(E)$ das Unterbündel der g -antisymmetrischen Elemente von $\text{End}(E)$:

$$A \in \text{End}_g(E)_p \iff 0 = g_p(A \cdot e, e') + g_p(e, A \cdot e'), \quad \forall p \in M, \forall e, e' \in E_p.$$

Insbesondere ist $\mathfrak{kA}(\nabla, g)$ ein affiner Raum mit assoziiertem Vektorraum $\Gamma(T^*M \otimes \text{End}_g(E))$.

Beweis. Die kovariante Ableitung ∇ gehört zu $\mathfrak{kA}(E, g)$ genau dann, wenn $(\nabla g)(e_1, e_2) = 0$ für alle $e_1, e_2 \in \Gamma(E)$. Wir haben nach Satz 9.44

$$\begin{aligned} (\nabla g)(e_1, e_2) &= C_1^1 \circ C_1^1 \left((\nabla g) \otimes e_1 \otimes e_2 \right) \\ &= C_1^1 \circ C_1^1 \left(\nabla(g \otimes e_1 \otimes e_2) - g \otimes (\nabla e_1) \otimes e_2 - g \otimes e_1 \otimes (\nabla e_2) \right) \\ &= \nabla \left(C_1^1 \circ C_1^1 (g \otimes e_1 \otimes e_2) \right) - g(\nabla e_1, e_2) - g(e_1, \nabla e_2) \\ &= d(g(e_1, e_2)) - g(\nabla e_1, e_2) - g(e_1, \nabla e_2). \end{aligned}$$

Die Aussage über $\nabla^2 - \nabla^1$ folgt, wenn wir (4.3) jeweils für ∇^1 und ∇^2 voneinander subtrahieren. \square

Folgerung 4.6. *Es sei (E, g) ein pseudoorthogonales Vektorbündel, $\nabla \in \mathfrak{kA}(E)$ und e_1, \dots, e_n ein globaler Rahmen für E . Es seien G und $\nabla = d + \omega$ die Darstellungen von g und von ∇ bezüglich dieses Rahmens. Dann gilt $\nabla \in \mathfrak{kA}(E, g)$ genau dann, wenn*

$$dG = (G \cdot \omega)^T + G \cdot \omega. \quad (4.4)$$

Wenn der Rahmen orthonormal ist, lässt sich diese Bedingung als

$$0 = (\delta^{(\sigma_+, \sigma_-)} \cdot \omega)^T + \delta^{(\sigma_+, \sigma_-)} \cdot \omega$$

umschreiben. Wenn g positiv definit und e_1, \dots, e_n orthonormal ist, bedeutet das, dass ω antisymmetrisch ist.

Beweis. Wir schreiben die Gleichung (4.3) $dg_{ij} = g(\nabla e_i, e_j) + g(e_i, \nabla e_j)$ mit Hilfe der Formel $\nabla e_\ell = \sum_k \omega_\ell^k e_k$ für $\ell = i, j$ um:

$$dg_{ij} = \sum_k (g_{kj} \omega_i^k + g_{ki} \omega_j^k).$$

Das ist der (i, j) -Eintrag der Matrixgleichung (4.4). \square

Bemerkung 4.7. Nach dem obigen Satz ist die kovariante Ableitung $\nabla = d$ bezüglich eines globalen orthonormalen Rahmen ein Element von $\mathfrak{kA}(\nabla, g)$. Da lokale orthonormale Rahmen immer existieren und da $\mathfrak{kA}(\nabla, g)$ ein affiner Raum ist, bekommen wir aus einem Argument, das sehr dem Argument in Satz 9.3 in DG1 ähnelt, dass $\mathfrak{kA}(\nabla, g)$ nicht leer ist. Daher ist $\mathfrak{kA}(\nabla, g)$ in Bijektion mit $\Gamma(T^*M \otimes \text{End}_g(E))$. \triangle

Wenn (E, g) pseudoorthogonal ist, dann ist auch ${}^F E, g \circ F$ pseudoorthogonal. Es gilt

$$\nabla \in \text{kA}(E, g) \implies {}^F \nabla \in \text{kA}({}^F E, g \circ F)$$

Folgerung 4.8. *Es sei $\nabla \in \text{kA}(E, g)$ und σ_1, σ_2 zwei ∇ -parallele Schnitte auf einer offenen zusammenhängenden Menge $U \subset M$. Dann ist $g(\sigma_1, \sigma_2) : U \rightarrow \mathbb{R}$ konstant. Insbesondere*

(a) *wenn e_1, \dots, e_h ein ∇ -paralleler Rahmen auf U ist und ein $p \in U$ existiert, sodass $e_1(p), \dots, e_h(p)$ eine orthonormale Basis für E_p ist, dann ist e_1, \dots, e_h ein orthonormaler Rahmen.*

(b) *wenn $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine stückweise glatte Kurve ist, dann gilt*

$$g_{\gamma(t_0)}(u_1, u_2) = g_{\gamma(t_1)}(P_{t_0 t_1}^\gamma u_1, P_{t_0 t_1}^\gamma u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in E_{\gamma(t_0)},$$

wobei $P_{t_0 t_1}^\gamma : E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}$ die Parallelverschiebung entlang γ darstellt.

Beweis. Die rechte Seite von (4.3) verschwindet für alle Paare von Schnitten aus einem parallelen Rahmen. Daher gilt $d(g(e_i, e_j)) = 0$. Da U zusammenhängend ist, folgt, dass $g(e_i, e_j)$ konstant ist. \square

4.2 Torsion und Pullback

Wenn $\nabla \in \text{kA}(TM)$ ist, können wir die Antisymmetrisierung von ∇ mit der Lie-Klammer vergleichen. Die Torsion $\tau^\nabla \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ ist das Tensorfeld

$$\tau^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

(siehe Abschnitt 9.11 in DG1). Wir sagen, dass ∇ symmetrisch ist, wenn $\tau^\nabla = 0$. Das Verschwinden von τ^∇ auf dem Definitionsbereich U einer Karte $\varphi : U \rightarrow V$ ist gleichbedeutend mit der Bedingung $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i}$. Das ist äquivalent zur Symmetrie der Christoffelsymbole des Rahmens $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}$ in den unteren Indizes:

$$\omega_{ij}^k = \omega_{ji}^k, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, m$$

(es kann aber wohl sein, dass $\omega_{ij}^k \neq \omega_{ji}^k$ für einen anderen Rahmen).

Allgemeiner kann man zeigen, dass wenn e_1, \dots, e_n ein beliebiger Rahmen mit dazugehörigen Matrix der Zusammenhangsformen ω . Dann gilt die Formel

$$\tau^i = de^i + \sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge e^j,$$

wobei $\tau^i = e^i(\tau^\nabla)$. Wenn wir den Spaltenvektor von 1-Formen $e := (e^1, \dots, e^n)$ und den Spaltenvektor von 2-Formen $\tau := (\tau^1, \dots, \tau^n)$ definieren, dann lässt sich die obige Formel als

$$\tau = de + \omega \wedge e \tag{4.5}$$

umschreiben.

Wir betrachten nun eine Abbildung $F : N \rightarrow M$ und wollen eine Art Torsion für kovariante Ableitungen auf ${}^F TM$ definieren.

Definition 4.9. Es sei $F : N \rightarrow M$ und $\tilde{\nabla} \in \text{kA}({}^F TM)$. Wir definieren die Torsion $\tau^{\tilde{\nabla}} \in \Gamma(T^*N \otimes T^*N \otimes {}^F TM)$ von $\tilde{\nabla}$ als

$$\tau^{\tilde{\nabla}}(X, Y) = \tilde{\nabla}_X(dF \cdot Y) - \tilde{\nabla}_Y(dF \cdot X) - dF \cdot [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(N).$$

Wenn $\tau^{\tilde{\nabla}} = 0$ gilt, sagen wir, dass $\tilde{\nabla}$ symmetrisch ist. \triangle

Bemerkung 4.10. Wie für die Torsion einer kovarianten Ableitung auf TM lässt sich leicht prüfen, dass der Ausdruck in der obigen Definition tatsächlich $C^\infty(N)$ -linear ist und daher ist die Torsion ein Tensorfeld. \triangle

Bemerkung 4.11. Wenn $(U, (x^1, \dots, x^n))$ eine Karte auf N ist, dann ist $\tilde{\nabla}$ symmetrisch auf U genau dann, wenn

$$\tilde{\nabla}_{\partial_{x^i}} dF \cdot \partial_{x^j} = \tilde{\nabla}_{\partial_{x^j}} dF \cdot \partial_{x^i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad \triangle$$

Es sei $\nabla \in \text{kA}(TM)$ und $F : N \rightarrow M$ eine Abbildung. Dann betrachten wir das Pullback-Tensorfeld $F^*\tau^\nabla \in \Gamma(T^*N \otimes T^*N \otimes {}^F TM)$, wobei

$$F^*(\tau^\nabla)_p(u, v) = \tau_{F(p)}^\nabla(d_p F \cdot u, d_p F \cdot v), \quad \forall p \in N, \forall u, v \in T_p N.$$

Wir können deshalb $F^*(\tau^\nabla)$ mit $\tau^{F\nabla}$ vergleichen.

Satz 4.12. Für alle Abbildungen $F : N \rightarrow M$ und kovariante Ableitungen ∇ auf TM gilt

$$\tau^{F\nabla} = F^*(\tau^\nabla).$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für alle Karten $(U_N, (x^1, \dots, x^m))$ von N die Gleichung

$$\tau^{F\nabla}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = \tau^\nabla(dF \cdot \partial_{x^i}, dF \cdot \partial_{x^j}), \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad (4.6)$$

gilt. Zu diesem Zweck können wir annehmen, dass eine Karte $(U_M, (y^1, \dots, y^m))$ existiert, sodass $F(U_N) \subset U_M$ gilt. Dann wirkt das Differential von F als

$$dF \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_k \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \circ F.$$

Deshalb ist die rechte Seite von (4.6) gleich

$$\tau_F^\nabla(dF \cdot \partial_{x^i}, dF \cdot \partial_{x^j}) = \sum_{k,l} \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \frac{\partial F^l}{\partial x^j} \tau_F^\nabla(\partial_{y^k}, \partial_{y^l}) = \sum_{k,l} \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \frac{\partial F^l}{\partial x^j} \left(\nabla_{\partial_{y^k}} \frac{\partial}{\partial y^l} - \nabla_{\partial_{y^l}} \frac{\partial}{\partial y^k} \right).$$

Wir kümmern uns nun um die linke Seite von (4.6):

$$\tau^{F\nabla}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = {}^F \nabla_{\partial_{x^i}}(dF \cdot \partial_{x^j}) - {}^F \nabla_{\partial_{x^j}}(dF \cdot \partial_{x^i}). \quad (4.7)$$

Wir erarbeiten den ersten Term

$$\begin{aligned}
{}^F\nabla_{\partial_{x^i}}(dF \cdot \partial_{x^j}) &= \sum_l {}^F\nabla_{\partial_{x^i}} \frac{\partial F^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l} \circ F = \sum_l \left(\frac{\partial^2 F^l}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l} \circ F + \frac{\partial F^l}{\partial x^j} {}^F\nabla_{\partial_{x^i}} \frac{\partial}{\partial y^l} \circ F \right) \\
&= \sum_l \left(\frac{\partial^2 F^l}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l} \circ F + \frac{\partial F^l}{\partial x^j} \nabla_{dF \cdot \partial_{x^i}} \frac{\partial}{\partial y^l} \right) \\
&= \sum_l \frac{\partial^2 F^l}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l} \circ F + \sum_{k,l} \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \frac{\partial F^l}{\partial x^j} \nabla_{\partial_{y^k}} \frac{\partial}{\partial y^l}.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun diese Identität und die mit i und j umgetauscht in (4.7) ein und finden mittels des Satzes von Schwarz über die Kommutativität von partiellen Ableitungen die gewünschte Gleichung. \square

4.3 Die Levi-Civita Ableitung

Wir sind bereit die Existenz und Eindeutigkeit der Levi-Civita Ableitung zu beweisen.

Satz 4.13 (Fundamentalsatz der PR-Geometrie). *Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit. Es gibt eine eindeutige symmetrische kovariante Ableitung ∇ auf TM , die g erhält, die sogenannte Levi-Civita Ableitung. Für alle $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist sie durch die Zerlegung in dem symmetrischen und antisymmetrischen Teil*

$$2g(\nabla Y, \cdot) = \mathcal{L}_Y g + d(bY) \quad (4.8)$$

bestimmt, die die äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= \mathcal{L}_X(g(Y, Z)) + \mathcal{L}_Y(g(X, Z)) - \mathcal{L}_Z(g(X, Y)) \\
&+ g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y)
\end{aligned} \quad (4.9)$$

für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ hat. Wenn (x^1, \dots, x^m) eine Karte ist, hat ∇ die Christoffelsymbole

$$\omega_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}). \quad (4.10)$$

bezüglich der Karte (x^1, \dots, x^m) und des Rahmens $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Notwendigkeit der Formeln (4.9) und (4.10). Für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ haben wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\
\mathcal{L}_Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \\
\mathcal{L}_Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).
\end{aligned} \quad (4.11)$$

Wir haben drei Gleichungen aber sechs Terme auf den rechten Seiten, die unbekannt sind. Wir benutzen daher die Symmetrie von ∇ , um drei der Unbekannten wegzubekommen:

$$\begin{aligned} g(Y, \nabla_X Z) &= g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z]), \\ g(Z, \nabla_Y X) &= g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [Y, X]), \\ g(X, \nabla_Z Y) &= g(Y, \nabla_Y Z) + g(X, [Z, Y]). \end{aligned}$$

Wir setzen diese Gleichungen in (4.11) ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z]) \\ \mathcal{L}_Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [Y, X]), \\ \mathcal{L}_Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(Y, \nabla_Y Z) + g(X, [Z, Y]). \end{aligned}$$

Jetzt haben wir drei Gleichungen in drei Unbekannten (da g symmetrisch ist) und können das System lösen. Wir summieren dafür die erste und zweite Gleichung zusammen und subtrahieren die dritte, um die Koszul-Formel (4.9) zu bekommen. Das zeigt auch die Eindeutigkeit der Levi-Civita Ableitung. Für die Formel (4.10) nehmen wir eine Karte (U, φ) und setzen $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ und $Z = \partial_\ell$ in der Koszul-Formel ein. Wir bekommen

$$2 \sum_{\ell=1}^m \omega_{ij}^\ell g_{\ell k} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}.$$

Wenn wir $\omega_{ij} := (\omega_{ij}^1, \dots, \omega_{ij}^m) \in \mathbb{R}^m$ und

$$\mu_{ij} := (\partial_i g_{j1} + \partial_j g_{i1} - \partial_1 g_{ij}, \dots, \partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) \in \mathbb{R}^m$$

setzen, ist diese Gleichung gleichbedeutend mit $g \cdot \omega_{ij} = \frac{1}{2} \mu_{ij}$. Daher $\omega_{ij} = \frac{1}{2} g^{-1} \cdot \mu_{ij}$ und die Formel (4.10) folgt. Da $\omega_{ij}^k = \omega_{ji}^k$ klarerweise gilt, folgt aus Satz 9.47 in DG1, dass wenn die Levi-Civita Ableitung existiert, dann ist sie auch symmetrisch.

Zu zeigen, dass (4.8) und (4.9) äquivalent sind, berechnen wir mit Hilfe von Satz 8.22 in Differentialgeometrie 1

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_Y g)(X, Z) &= \iota_Z \iota_X \mathcal{L}_Y g = \iota_Z (\mathcal{L}_Y (\iota_X g) - \iota_{\mathcal{L}_Y X} g) \\ &= \mathcal{L}_Y (\iota_Z (\iota_X g)) - \iota_{\mathcal{L}_Y Z} (\iota_X g) - g(\mathcal{L}_Y X, Z) \\ &= \mathcal{L}_Y (g(X, Z)) - g([Y, Z], X) - g([Y, X], Z), \end{aligned}$$

wobei ι die Einsatzung von Vektoren bezeichnet. Nach der Definition des äußeren Differentials von 1-Formen:

$$d(\flat Y)(X, Z) = \mathcal{L}_X(g(Y, Z)) - \mathcal{L}_Z(g(X, Y)) - g(Y, [X, Z]).$$

Das Summieren der letzten zwei Gleichungen liefert die gewünschte Äquivalenz.

Wir zeigen nun die Existenz. Wir definieren dafür ∇Y mittels (4.8), sodass es klar ist, dass $\nabla Y \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$. Es bleibt nun die Leibniz-Regel und die Erhaltung der Metrik zu zeigen. Beide lassen sich mittels (4.9) einfach prüfen. \square

Bemerkung 4.14. In der Literatur ist es üblich die Schreibweise Γ_{ij}^k statt ω_{ij}^k für die Christoffelsymbole der Levi-Civita kovarianten Ableitung zu verwenden. \triangle

Bemerkung 4.15. Nach (4.10) werden die Christoffel-Symbole und daher die Levi-Civita Ableitung durch die Koeffizienten (g_{ij}) und ihre Differentiale (dg_{ij}) in Koordinaten bestimmt. \triangle

Beispiel 4.16. Die Levi-Civita Ableitung von $(\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}})$ ist die triviale kovariante Ableitung $\nabla = d$ bezüglich der Koordinatenvektorfelder $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$. \triangle

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Levi-Civita Ableitung unter isometrische Immersionen verhält. Das wollen wir nun untersuchen.

Satz 4.17. *Es sei $F : (N, g^N) \rightarrow (M, g^M)$ eine isometrische Immersion und sei $\Pi : {}^F TM \rightarrow TN$ die in Definition 3.24 gegebene orthogonale Projektion. Wir schreiben ∇^M und ∇^N für die Levi-Civita Ableitungen von g^M und g^N . Dann ist $\Pi \circ {}^F \nabla^M \circ dF \in \text{kA}(TN)$ und*

$$\nabla^N = \Pi \circ {}^F \nabla^M \circ dF. \quad (4.12)$$

Wenn $L : O \rightarrow N$ eine Abbildung ist, gilt die Formel

$${}^L \nabla^N = {}^L \Pi \circ ({}^F \circ L) \nabla^M \circ d_L F, \quad (4.13)$$

wobei ${}^L \Pi : {}^F \circ L TM \rightarrow {}^L TN$ und $d_L F : {}^L TN \rightarrow ({}^F \circ L) TM$ die Bündelhomomorphismen über O ist, die von Π und dF induziert werden.

Beweis. Die Tatsache, dass $\tilde{\nabla} := \Pi \circ {}^F \nabla^M \circ dF$ eine kovariante Ableitung auf TN ist wurde in DG1, Satz 9.9 bewiesen. Wir müssen zeigen, dass $\tilde{\nabla}$ die Metrik g^N erhält und symmetrisch ist. Für die Erhaltung der Metrik berechnen wir

$$\begin{aligned} dg^N(e_1, e_2) &= dg_F^M(dF \cdot e_1, dF \cdot e_2) = g_F^M({}^F \nabla dF \cdot e_1, dF \cdot e_2) + g_F^M(dF \cdot e_1, {}^F \nabla dF \cdot e_2) \\ &= F^* g^M(\Pi {}^F \nabla dF \cdot e_1, e_2) + F^* g^M(e_1, \Pi {}^F \nabla dF \cdot e_2) \\ &= g^N(\tilde{\nabla} e_1, e_2) + g^N(e_1, \tilde{\nabla} e_2) \end{aligned}$$

wobei wir $g^N = F^* g^M$ und die Identität (3.3) benutzt haben. Für die Symmetrie behaupten wir, dass

$$\Pi \circ F^* \tau^\nabla = \tau^{\tilde{\nabla}}.$$

Da $\tau^\nabla = 0$ gilt, würde dann auch $\tau^{\tilde{\nabla}} = 0$ folgen. Um die Behauptung zu zeigen, nehmen wir $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ beliebig:

$$\begin{aligned} \Pi \circ F^* \tau^\nabla(X, Y) &= \Pi \circ \tau^{\nabla} (X, Y) = \Pi \circ \left({}^F \nabla_X dF \cdot Y - {}^F \nabla_Y dF \cdot X - dF \cdot [X, Y] \right) \\ &= \tau^{\tilde{\nabla}}(X, Y), \end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Gleichung Satz 4.12 benutzt haben. Wir nehmen nun $L : O \rightarrow N$ und zeigen (4.13). Nochmal wie in DG1, Satz 9.9 ist die rechte Seite von (4.13) eine

kovariante Ableitung. Um die Gleichheit zwischen linker und rechter Seite zu beweisen, reicht es sie auf einem Rahmen $e_1 \circ L, \dots, e_n \circ L$ von ${}^L TN$ zu prüfen, wobei e_1, \dots, e_n ein lokaler Rahmen für TN ist:

$${}^L \nabla^N(e_i \circ L) = \nabla_{dL}^N e_i = \Pi \circ {}^F \nabla_{dL}^M(dF \cdot e_i) = {}^L \Pi \circ {}^L({}^F \nabla^M)(d_L F \cdot (e_i \circ L)).$$

Die Aussage folgt, denn ${}^L({}^F TM) = ({}^{F \circ L})TM$ und ${}^L({}^F \nabla^M) = ({}^{F \circ L})\nabla^M$ (warum gelten diese Gleichungen?). \square

Bemerkung 4.18. In vielen Büchern hat Gleichung (4.12) die folgende äquivalente Gestalt. Es seien $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ und es sei angenommen, dass $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ existieren, die F -verwandt zu X und Y sind. Wenn N eine Untermannigfaltigkeit von M und F die Inklusion ist, dann können wir \tilde{X} und \tilde{Y} interpretieren als Erweiterungen von X, Y auf M . Dann wird Gleichung (4.12) zu

$$\nabla_X^N Y = \Pi(\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y}) \quad (4.14)$$

und zu

$$\nabla_X^N Y = (dF)^{-1}(\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y}) \quad \text{falls } F \text{ eine lokale Isometrie ist.} \quad (4.15)$$

Allgemein existieren \tilde{X}, \tilde{Y} nur lokal, was genug ist, um die Formel in Umgebungen U_N von $p \in N$ und U_M von $F(p)$ mit $F(U_N) \subset U_M$ zu benutzen. Wenn aber F eine Isometrie ist, dann existieren $\tilde{X} = F_*(X)$ und $\tilde{Y} = F_*(Y)$ eindeutig und global. \triangle

4.4 Das geodätische Vektorfeld

Definition 4.19. Es sei ∇ die LC-Ableitung von (M, g) . Die Beschleunigung bezüglich g^M einer glatten Kurve $\gamma : (t_0, t_1) \rightarrow M$ ist das Vektorfeld entlang γ gegeben als

$${}^\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma}.$$

Die Kurve γ heißt Geodätische für (M, g) falls ihre Beschleunigung bezüglich g^M verschwindet:

$${}^\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = 0, \quad (4.16)$$

oder, anders gesagt, wenn das Geschwindigkeitsfeld parallel entlang γ ist. Insbesondere ist $g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ konstant nach Folgerung 4.8.

$$\text{Die Geodätische } \gamma \text{ heißt } \begin{cases} \text{raumartig,} & \text{falls } g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) > 0, \\ \text{lichtartig,} & \text{falls } g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0, \\ \text{zeitartig,} & \text{falls } g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0. \end{cases} \quad \triangle$$

Bemerkung 4.20. Konstante Kurven sind immer Geodätische, da das Nullvektorfeld parallel ist. Außerdem aus $\dot{\gamma}(t) = 0$ für ein $t \in (t_0, t_1)$ folgt, dass $\dot{\gamma} \equiv 0$ nach der Eindeutigkeit der Parallelverschiebung. Insbesondere wenn (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, dann besitzt jede Geodätische γ konstante Geschwindigkeit $|\dot{\gamma}|_\gamma$. \triangle

Um Geodätische auf Untermannigfaltigkeit zu bestimmen ist der folgende Satz sehr nützlich.

Hilfssatz 4.21. *Es seien eine isometrische Immersion $F : (N, g^N) \rightarrow (M, g^M)$ und eine Kurve $\gamma : (t_0, t_1) \rightarrow N$ gegeben. Dann ist γ eine Geodätische für g^N genau dann, wenn die Beschleunigung von $F \circ \gamma$ bezüglich g^M senkrecht zu $dF(TN)$ steht. Insbesondere, wenn F eine lokale Isometrie ist, ist γ eine Geodätische bezüglich g^N genau dann, wenn $F \circ \gamma$ eine Geodätische bezüglich g^M ist. Ist F eine PR-Überlagerung und $\delta : (t_0, t_1) \rightarrow M$ eine Kurve, dann ist δ eine Geodätische bezüglich g^M genau dann, wenn alle Hochhebungen $\tilde{\delta} : (t_0, t_1) \rightarrow N$ von δ Geodätische bezüglich g^N sind.*

Beweis. Wir schreiben $\delta = F \circ \gamma$ und benutzen Formel (4.13) mit $L = \gamma$:

$$\gamma \nabla_{\partial_t}^N \dot{\gamma} = \gamma \Pi(\delta \nabla_{\partial_t}^M d_\gamma F \cdot \dot{\gamma}) = \gamma \Pi(\delta \nabla_{\partial_t}^M \dot{\delta}).$$

Die erste Aussage folgt, da $\ker \gamma \Pi$ das Normalenbündel von F (entlang γ) ist. Wenn nun F eine lokale Isometrie ist, verschwindet das Normalenbündel und wir bekommen die zweite Aussage. Für die letzte Aussage bemerken wir, dass $\delta = F \circ \tilde{\delta}$, wobei $\tilde{\delta}$ eine beliebige Hochhebung von δ . Nach der zweiten Aussage ist $\tilde{\delta}$ eine Geodätische genau dann, wenn δ eine Geodätische ist. \square

Bemerkung 4.22. Mit Hilfe von diesem Hilfssatz kann man alle Geodätischen auf den Modellräumen von Beispiel 3.19 und insbesondere auf der euklidischen Sphäre und dem hyperbolischen Raum (siehe Blatt 5-4) finden. \triangle

Bemerkung 4.23. Es sei $[\cdot] : (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\Gamma, g_{\mathbb{R}^n/\Gamma})$ die Riemannsche Überlagerung eines flachen Torus. Dann sind die Geodätischen $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$ Projektionen von Geraden auf \mathbb{R}^n : $\gamma(t) = [p + tv]$ für $p, v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $[p] \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ eine Bijektion zwischen 1-periodischen Geodätischen mit $\gamma(0) = [p]$ und Elementen von Γ existiert. Hier γ heißt 1-periodisch, wenn $\gamma(t+1) = \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. \triangle

Wir wollen nun die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Parametrisierung untersuchen, um zu sehen, wann eine Umparametrisierung einer Geodätischen wieder eine Geodätische ist.

Hilfssatz 4.24. *Es sei $\gamma : (t_0, t_1) \rightarrow (M, g)$ eine Kurve und $\varphi : (s_0, s_1) \rightarrow (t_0, t_1)$ eine Umparametrisierung. Wir setzen $\delta := \gamma \circ \varphi$. Dann*

$$\delta \nabla_{\partial_s} \dot{\delta} = \ddot{\varphi} \cdot \dot{\gamma}(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cdot (\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma})(\varphi).$$

Ist γ eine nicht-konstante Geodätische, dann ist δ eine Geodätische genau dann, wenn $\varphi(s) = as + b$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt $g_\delta(\dot{\delta}, \dot{\delta}) = a^2 g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$.

Beweis. Wir berechnen

$$\delta \nabla_{\partial_s} \dot{\delta} = \varphi^*(\gamma \nabla)_{\partial_s}(\dot{\varphi} \cdot \dot{\gamma}(\varphi)) = \ddot{\varphi} \cdot \dot{\gamma}(\varphi) + \dot{\varphi} \cdot (\gamma \nabla_{\dot{\varphi} \partial_t} \dot{\gamma})(\varphi) = \ddot{\varphi} \cdot \dot{\gamma}(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cdot (\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma})(\varphi).$$

Ist γ eine Geodätische und $\dot{\gamma} \neq 0$, dann ist δ eine Geodätische genau dann, wenn $\ddot{\varphi} = 0$ ist. \square

Um Geodätische besser zu studieren schreiben wir die Beschleunigung für eine Kurve $\gamma : (t_0, t_1) \rightarrow U$, wobei U der Definitionsbereich einer Karte $x = (x^1, \dots, x^m)$ ist. Wir setzen $x_\gamma := x \circ \gamma$ und bemerken, dass $\dot{\gamma} = \sum_k \dot{x}_\gamma^k \partial_{x^k}|_\gamma$. Dann

$$\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = \sum_{k=1}^m \left(\ddot{x}_\gamma^k + \sum_{i=1}^m (\omega_i^k(\gamma) \cdot \dot{\gamma}) \dot{x}_\gamma^i \right) \partial_{x^k}|_\gamma = \sum_{k=1}^m \left(\ddot{x}_\gamma^k + \sum_{i,j=1}^m \omega_{ij}^k(x_\gamma) \dot{x}_\gamma^i \dot{x}_\gamma^j \right) \partial_{x^k}|_\gamma,$$

wobei wir $\omega_{ij}^k \circ x^{-1}$ mit ω_{ij}^k identifiziert haben. Dann ist γ eine Geodätische genau dann, wenn die m Funktionen $x_\gamma^1, \dots, x_\gamma^m$ das folgende System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfüllen:

$$\ddot{x}_\gamma^k + \sum_{i,j=1}^m \omega_{ij}^k(x_\gamma) \dot{x}_\gamma^i \dot{x}_\gamma^j = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (4.17)$$

Wie schon in Analysis 2 gesehen, ist dieses System äquivalent zu einem System von $2m$ Differentialgleichungen erster Ordnung in den $2m$ Unbekannten $x_\gamma^1, \dots, x_\gamma^m, v_\gamma^1, \dots, v_\gamma^m$:

$$\forall k = 1, \dots, m, \quad \begin{cases} \dot{x}_\gamma^k = v_\gamma^k \\ \dot{v}_\gamma^k = - \sum_{i,j=1}^m \omega_{ij}^k(x_\gamma) v_\gamma^i v_\gamma^j. \end{cases}$$

Also ist die Vektorfunktion (x_γ, v_γ) eine Kurve in $x(U) \times \mathbb{R}^m$. Wir wissen aber, dass

$$\alpha := (x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m) : TM|_U \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^m$$

eine Karte für das Tangentialbündel ist, wobei

$$\alpha^{-1}(x_0, v_0) = \sum_{k=1}^m v_0^k \partial_{x^k}|_{x^{-1}(x_0)}, \quad \forall (x_0, v_0) \in x(U) \times \mathbb{R}^m.$$

Dann gilt $\alpha \circ \dot{\gamma} = (x_\gamma, v_\gamma)$ und daher ist $\dot{\gamma} : (t_0, t_1) \rightarrow TM|_U$ eine Integralkurve des Vektorfelds $\Gamma^x \in \mathfrak{X}(TM|_U)$ definiert als

$$\Gamma^x := \sum_{k=1}^m v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^m (\omega_{ij}^k \circ \pi) v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k},$$

wobei $\pi : TM \rightarrow M$ die kanonische Projektion ist. Mit Hilfe der Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen, bekommen wir dann das folgende Resultat.

Hilfssatz 4.25. *Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und $x : U \rightarrow V$ eine Karte für M . Eine Kurve $\gamma : (t_0, t_1) \rightarrow M$ mit Bild in U ist eine Geodätische genau dann, wenn $\dot{\gamma} : (t_0, t_1) \rightarrow TM|_U$ eine Integralkurve von Γ^x ist. Wenn $\xi : (t_0, t_1) \rightarrow TM|_U$ eine Integralkurve von Γ^x ist, existiert eine Geodätische γ mit $\xi = \dot{\gamma}$. \square*

Satz 4.26. *Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein globales Vektorfeld $\Gamma \in \mathfrak{X}(TM)$ mit der folgenden Eigenschaft: $\xi : (t_0, t_1) \rightarrow TM$ ist eine Integralkurve von Γ , genau dann wenn eine Geodätische $\gamma : (t_0, t_1) \rightarrow M$ mit $\xi = \dot{\gamma}$. Wenn U der Definitionsbereich einer Karte x für M ist, dann gilt $\Gamma|_{TM|_U} = \Gamma^x$.*

Beweis. Wir definieren Γ , indem wir $\Gamma|_{TM|_U} := \Gamma^x$ für alle Karten x von M mit Definitionsbereich U setzen. Wir behaupten, dass Γ wohldefiniert ist, was auch den ganzen Satz beweist. Also müssen wir zeigen, dass $\Gamma^x|_{TM|_{U \cap U'}} = \Gamma^{x'}|_{TM|_{U \cap U'}}$, wenn wir zwei Karten haben. Es sei $v \in TM|_{U \cap U'}$ und $\xi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM|_{U \cap U'}$ eine Integralkurve von Γ^x mit $\xi(0) = v$. Nach dem obigen Hilfssatz ist $\xi = \dot{\gamma}$ für eine Geodätische $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U \cap U'$. Nochmal nach dem obigen Hilfssatz ist $\xi = \dot{\gamma}$ eine Integralkurve für $\Gamma^{x'}$. Daher

$$\Gamma^x(v) = \dot{\xi}(0) = \Gamma^{x'}(v). \quad \square$$

Folgerung 4.27. *Für alle $v \in TM$ existiert eindeutig die maximale Geodätische $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ mit Anfangsbedingung v , sodass $\dot{\gamma}_v : I_v \rightarrow TM$ die einzige maximale Integralkurve von Γ mit $\dot{\gamma}_v(0) = v$ ist. Für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $I_{cv} = \frac{1}{c}I_v$ und*

$$\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct), \quad \forall t \in I_{cv}.$$

Proof. Die Aussage folgt aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und Hilfssatz 4.24. □

4.5 Die Exponentialabbildung

Es sei nun $p \in M$ fest. Für alle $v \in T_pM$ betrachten wir die maximale Geodätische γ_v . Unser Ziel ist nun eine Karte (U, φ) um p finden, sodass $\varphi(p) = 0$ und $\varphi \circ \gamma_v$ ein von 0 stammendes Geradenstück ist. Wir geben erst eine Abbildung \exp_p die als Inverse von φ dienen sollte und dann zeigen, dass \exp_p in einer Umgebung von 0 invertierbar ist.

Da $T_pM \cong \mathbb{R}^m$ können wir T_pM als Definitionsmenge von \exp_p nehmen. In diesem Fall haben wir ein natürliches Kandidat für die Richtung des Geradenstücks und zwar v . Also wollen wir $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$ haben, sodass wenn $1 \in I_v$ ist, dann $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$.

Definition 4.28. Der Definitionsbereich der Exponentialabbildung ist gegeben als die Teilmenge $\mathcal{E} := \{v \in TM \mid 1 \in I_v\}$ des Tangentialraums. Die Exponentialabbildung ist

$$\exp : \mathcal{E} \rightarrow M, \quad \exp(v) := \pi \circ \Phi_{\Gamma}^1(v).$$

Für $p \in M$ ist die eingeschränkte Exponentialabbildung $\exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow M$ an p die Einschränkung $\exp|_{\mathcal{E}_p}$, wobei $\mathcal{E}_p \in \mathcal{E} \cap T_pM$. Wir schreiben

$$g^p := \exp_p^* g$$

für das Pullback-Tensorfeld auf \mathcal{E}_p . △

Bemerkung 4.29. Die Bedingung $\mathcal{E}_p = T_pM$ impliziert, dass für alle $v \in T_pM$ die Bedingung $I_v = \mathbb{R}$ gilt (die Umkehrimplikation ist unmittelbar). Denn für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $c = c \cdot 1 \in cI_{cv} = I_v$. \triangle

Satz 4.30. Die Exponentialabbildung besitzt die folgenden Eigenschaften:

(a) die Menge \mathcal{E} ist eine offene Umgebung des Nullschnitts und \mathcal{E}_p ist sternförmig bezüglich 0_p für alle $p \in M$;

(b) wenn Φ_Γ der Fluss von Γ ist, dann gilt für alle $t \in [0, 1]$ und $v \in \mathcal{E}$

$$\exp(tv) = \gamma_v(t) = \pi \circ \Phi_\Gamma^t(v);$$

(c) für $p \in M$, $v \in \mathcal{E}_p$ ist g_v^p nicht ausgeartet genau dann, wenn $d_v \exp_p$ invertierbar ist;

(d) für $p \in M$ und $0 \in T_pM$ gilt unter der Identifizierung $T_0(T_pM) = T_pM$:

$$d_0 \exp_p = \text{id}_{T_pM}.$$

Insbesondere:

(i) $g_0^p = g_p$;

(ii) \exp_p ist ein Diffeomorphismus von einer Umgebung von $0 \in T_pM$ auf eine Umgebung von $p \in M$.

Beweis. Die Menge \mathcal{E} ist offen, da der Definitionsbereich $\mathcal{U} \subset TM \times \mathbb{R}$ vom Fluss Φ_Γ offen ist. Die Menge \mathcal{E} enthält den Nullschnitt, da konstante Kurven Geodätische sind. Wenn $v \in \mathcal{E}_p$ liegt, dann ist $I_{tv} = \frac{1}{t}I_v \supset I_v$ für alle $t \in (0, 1]$ und daher $1 \in I_{tv}$. Das zeigt (a). Für (b) benutzen wir Hilfssatz 4.24:

$$\exp(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t) = \pi(\dot{\gamma}_v(t)) = \pi(\Phi_\Gamma^t(v)).$$

Das zeigt auch, dass $\exp = \pi \circ \Phi_\Gamma^1$ glatt als Verkettung von glatten Abbildungen ist. Punkt (c) ist eine Folgerung der Definition von g^p als Pullback durch $d_v \exp_p$. Punkt (d) folgt aus

$$d_0 \exp_p \cdot v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_v(t) = \dot{\gamma}_v(0) = v. \quad \square$$

Definition 4.31. Eine Umgebung $U \subset M$ von $p \in M$ heißt normal, wenn eine offene, sternförmige Menge $V' \subset \mathcal{E}_p$ bezüglich $0 \in T_pM$ existiert, sodass $\exp_p : V' \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist.

Es sei v_1, \dots, v_m eine orthonormale Basis von T_pM und wir betrachten die lineare Isometrie $\beta : (\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}, g_{\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}}) \rightarrow (T_pM, g_p)$, $\beta(x) = \sum_i x^i v_i$. Dann heißen

$$x := (\exp_p \circ \beta)^{-1} : U \rightarrow V := \beta^{-1}(V')$$

Normalkoordinaten um p . Wir benutzen die Notation g^p auch für das Pullback-Tensorfeld $\beta^* g^p = (x^{-1})^* g$. \triangle

Satz 4.32. Jedes $p \in (M, g)$ besitzt eine Normalumgebung U und Normalkoordinaten $x : U \rightarrow V$. Es gilt dazu

- (a) $x(p) = 0$;
- (b) $x(\gamma_v(t)) = (tx^1, \dots, tx^m)$, wobei $v = \sum_i x^i v_i$;
- (c) g^p ist eine PR-Metrik auf V mit $g^p(0) = g_{\mathbb{R}^{\sigma_+ \cdot \sigma_-}}$;
- (d) $\omega_{ij}^k(0) = 0$ für alle $i, j, k = 1, \dots, m$ und $d_0 g^p = 0$.

Beweis. Punkt (a) ist unmittelbar. Für (b) benutzen wir Satz 4.30.(b) und finden, dass $\exp_p^{-1}(\gamma_v(t)) = tv$. Die Aussage folgt aus der Linearität von β . Punkt (c) folgt aus Punkten (c) und (d).(i) im Satz 4.30.

Es bleibt (d) zu beweisen. Es sei $x_0 \in V$ und $v_0 = \beta(x_0)$. Da γ_{v_0} eine Geodätische ist, ist $x \circ \gamma_{v_0} = (tx_0^1, \dots, tx_0^m)$ eine Lösung der Gleichung (4.17). Für $t = 0$ bekommen wir

$$0 + \sum_{i,j=1}^m \omega_{ij}^k(0) x_0^i x_0^j = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m$$

Da V sternförmig bezüglich 0 ist, finden wir, dass

$$x^T \cdot \omega^k(0) \cdot x = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Nach der Symmetrie der LC-Ableitung ist die Matrix $\omega^k(0)$ symmetrisch, was $\omega^k(0) = 0$ impliziert. Die Aussage über die ersten partiellen Ableitungen von g^p in 0 folgt nun aus der Identität (4.4) $d_0 G = (\omega(0) \cdot G(0))^T + (G(0) \cdot \omega(0)) = 0$. \square

Bemerkung 4.33. Nach Punkt (c) und (d) haben wir die Taylorentwicklung um $0 \in \mathbb{R}^m$ der Metrik in Normalenkoordinaten

$$g_x^p = g_{\mathbb{R}^{\sigma_+ \cdot \sigma_-}} + o(|x|_{\mathbb{R}^m}), \quad \text{oder} \quad g_v^p = g_p + o(|v|_{g_p}),$$

wobei die Formel links in $\mathbb{R}^{\sigma_+ \cdot \sigma_-}$ gilt und die Formel rechts in $T_p M$. \triangle

Satz 4.34. Es sei $F : (N, g^N) \rightarrow (M, g^M)$ eine lokale Isometrie und $p \in M$. Es seien U_p und $U_{F(p)}$ Normalumgebungen von p und $F(p)$, sodass $F(U_p) \subset U_{F(p)}$. Dann gilt

$$F(\exp_p(v)) = \exp_{F(p)}(d_p F \cdot v), \quad \forall v \in \exp_p^{-1}(U).$$

Also ist die Darstellung von F bezüglich Normalkoordinaten um p und $F(p)$ linear.

Beweis. Wir nehmen $v \in \exp_p^{-1}(U_p) \subset T_p N$ und betrachten die maximale Geodätische $\gamma_v : I_v \rightarrow N$ für g^N mit $\dot{\gamma}(0) = v$. Dann ist $F \circ \gamma_v$ eine Geodätische für g^M nach Hilfssatz 4.21. Also existiert $u \in TM$ mit $F \circ \gamma_v(t) = \gamma_u(t)$ für $t \in I_v$. Wir finden u :

$$u = \dot{\gamma}_u(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (F \circ \gamma_v) = d_p F \cdot \dot{\gamma}_v(0) = d_p F \cdot v.$$

Also $F(\exp_p(v)) = F(\gamma_v(1)) = \gamma_{d_p F \cdot v}(1) = \exp_{F(p)}(d_p F \cdot v)$. \square

Folgerung 4.35. *Es seien $F_1, F_2 : (N, g^N) \rightarrow (M, g^M)$ lokale Isometrien. Es sei angenommen, dass $p \in N$ existiert, sodass $F_1(p) = F_2(p)$ und $d_p F_1 = d_p F_2$. Dann gilt $F_1 = F_2$. Insbesondere ist die Abbildung $I : \text{Iso}(M, g) \rightarrow O(M, g)$ von Satz 3.37 injektiv.*

Beweis. Wir betrachten $N' := \{q \in N \mid F_1(q) = F_2(q), d_q F_1 = d_q F_2\}$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

- (a) Der Punkt p gehört zu N' und daher $N' \neq \emptyset$.
- (b) Die Menge N' ist abgeschlossen. Um diese Eigenschaft zu zeigen. Setzen wir $N'' := \{q \in N \mid F_1(q) = F_2(q)\}$, sodass $N' = \{q \in N'' \mid d_q F_1 = d_q F_2\} \subset N''$. Da F_1, F_2 stetig sind und M hausdorffsch ist, wissen wir, dass N'' abgeschlossen ist. Es reicht dann zu beweisen, dass N' abgeschlossen in N'' ist. Das ist äquivalent zu der Tatsache, dass N' lokal abgeschlossen in N'' ist. Also müssen wir für jedes $q \in N''$ eine Umgebung $U_q'' \subset N''$ von q in N'' finden, sodass $N' \cap U_q''$ abgeschlossen in $N'' \cap U_q''$ ist. Wir nehmen dann $q \in N'$ und setzen $r := F_1(q) = F_2(q)$. Wir finden Karten $x : U_q \rightarrow V_q$ um q und $y : U_r \rightarrow V_r$ um r , sodass $F_1(U_q) \subset U_r$ und $F_2(U_q) \subset U_r$. Dann gilt $x(N' \cap U_q) = x(N'' \cap U_q) \cap A$, wobei

$$A := \bigcap_{i=1, \dots, n} \left\{ \partial_{x^i} (y \circ F_1 \circ x^{-1} - y \circ F_2 \circ x^{-1}) = 0 \right\}$$

abgeschlossen in $x(U_q)$ ist. Die Menge $N' \cap (N'' \cap U_q) = N'' \cap x^{-1}(A)$ ist dann abgeschlossen in U_q und daher auch in $N'' \cap U_q$. Die Aussage folgt mit $U_q'' = N'' \cap U_q$.

- (c) Die Menge N' ist offen. Wenn $q \in N'$ und U_q, U_r Normalumgebungen von q und $r = F_1(q) = F_2(q)$ mit $F_1(U_q) \subset U_r$ und $F_2(U_q) \subset U_r$ sind, dann $F_1 \equiv F_2$ auf U_q nach Satz 4.34. Wir nehmen das Differential dieser Gleichung, um $d_{q'} F_1 = d_{q'} F_2$ auf U_q zu finden.

Da N zusammenhängend ist, folgt $N = N'$. □

4.6 Das Lemma von Gauß

Wir setzen nun voraus, dass g eine Riemannsche Metrik auf M ist, und wir wollen Normalkoordinaten benutzen, um zu beweisen, dass Geodätische genau die lokal minimierenden Kurven sind. Dafür führen wir den folgenden Begriff ein.

Definition 4.36. Es sei (M, g) eine R-Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und r eine positive reelle Zahl. Wir schreiben

$$\begin{aligned} B_r^{T_p M} &:= \{v \in T_p M \mid |v|_{g_p} < r\}, \\ \bar{B}_r^{T_p M} &:= \{v \in T_p M \mid |v|_{g_p} \leq r\}, \\ S_r^{T_p M} &:= \{v \in T_p M \mid |v|_{g_p} = r\}. \end{aligned}$$

Ein offener geodätischer Ball $B_r(p)$ mit Mittelpunkt p und Radius r ist eine Teilmenge einer Normalumgebung U von p , sodass

$$\exp_p(B_r^{T_p M}) = B_r(p).$$

Eine ähnliche Definition gilt für abgeschlossene geodätische Bälle $\bar{B}_r(p)$ und geodätische $(m-1)$ -dimensionale Sphären $S_r(p)$. Wir definieren den Injektivitätsradius von (M, g) in p als

$$\text{inj}_p(M, g) := \sup \left\{ r > 0 \mid \exists \text{ geodätischer Ball } B_r(p) \right\} \in (0, \infty]$$

und den globalen Injektivitätsradius von (M, g) als

$$\text{inj}(M, g) = \inf_{p \in M} \text{inj}_p(M, g) \in [0, \infty]. \quad \triangle$$

Bemerkung 4.37. Nach Definition von β gilt $\beta(B_r^m) = B_r^{T_p M}$, $\beta(\bar{B}_r^m) = \bar{B}_r^{T_p M}$ und $\beta(S_r^m) = S_r^{T_p M}$, wobei $B_r^m, \bar{B}_r^m, S_r^{m-1}$ euklidische Bälle und Sphäre mit Mittelpunkt 0 bezeichnen. Also gilt auch $x(B_r(p)) = B_r^m$, $x(\bar{B}_r(p))$ und $x(S_r(p)) = S_r^{m-1}$ für Normalkoordinaten x um p . △

Bemerkung 4.38. Wir werden im Satz 4.43 sehen, dass geodätische Bälle auch metrische Bälle $\{q \in M \mid d_g(p, q) < r\}$ mit selbem Radius und Mittelpunkt sind. Nicht alle metrischen Bällen sind aber geodätische Bälle. Zum Beispiel wenn (M, g) kompakt ist, dann existiert $r > 0$, sodass $M = \{q \in M \mid d_g(p, q) < r\}$. Aber M kann nicht zu B_r^m homöomorph sein denn B_r^m ist nicht kompakt. △

Ein wichtiger Punkt in unseren Argumenten wird sein, g^p in Polarkoordinaten zu beschreiben. Wir nehmen daher $\rho : (0, \infty) \times S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\rho(r, y) = r \cdot y$, sodass

$$d_{(r,y)}\rho \cdot \partial_r = \sum_{i=1}^m \frac{x^i}{|x|_{\mathbb{R}^m}} \partial_{x_i}, \quad x := \rho(r, y) \quad (4.18)$$

ist. Wir sagen dann, dass

$$\rho^{-1} \circ x : U \setminus \{p\} \rightarrow \rho^{-1}(V \setminus \{0\})$$

normale Polarkoordinaten sind. Zum Beispiel wenn $x : B_r(p) \rightarrow B_r^m$ ein geodätischer Ball ist, dann

$$\rho^{-1} \circ x : B_r(p) \setminus \{p\} \rightarrow (0, r) \times S_r^{n-1}.$$

Wir studieren nun die R-Metrik $\rho^* g^p$ auf $\rho^{-1}(V \setminus \{0\})$, wobei wir ρ aus der Notation lassen werden und g^p für $\rho^* g^p$ schreiben.

Hilfssatz 4.39 (Lemma von Gauß). *Es sei $v \in S_r^{T_p M} \cap V$. Dann gilt*

$$(a) \quad g_v^p(v, v) = g_p(v, v) = r^2;$$

(b) $g_v^p(u, v) = 0$ für alle $u \in T_v S_r^{T_p M}$.

Das heißt, dass in Normalkoordinaten die Radialrichtung ∂_r Einheitsnorm bezüglich g^p besitzt und dass die Sphäre S_r^{n-1} senkrecht bezüglich g^p zur Radialrichtung ∂_r steht. Anders gesagt gibt es einen Pfad von Riemannschen Metriken $r \mapsto h_r^p$ auf offenen Mengen von S^{n-1} , sodass in normalen Polarkoordinaten die folgende Darstellung gilt:

$$g^p = dr^2 + h_r^p. \quad (4.19)$$

Beweis. Es sei $\delta : [0, 1] \rightarrow V$ das Geradenstück $\delta(t) = tv$. Dann $\gamma_v(t) = \exp_p(\delta(t))$ und

$$g_v^p(v, v) = g_{\delta(1)}^p(\dot{\delta}(1), \dot{\delta}(1)) = g_{\gamma_v(1)}(\dot{\gamma}_v(1), \dot{\gamma}_v(1)) = g_{\gamma_v(0)}(\dot{\gamma}_v(0), \dot{\gamma}_v(0)) = g_p(v, v),$$

wobei wir in der zweiten Gleichung $g^p = \exp_p^* g$ benutzt haben und in der dritten Gleichung, dass eine Geodätische konstante Geschwindigkeit besitzt.

Es sei nun $u \in T_v S_r^{T_p M}$ beliebig und wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = g_{tv}^p(tu, v).$$

Dann ist $f(1) = g_v^p(u, v)$ und $f(0) = 0$. Also reicht es zu zeigen, dass $\dot{f}(t) = 0$ für $t \in [0, 1]$. Wir betrachten dazu eine Kurve $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_r^{T_p M} \cap V$, sodass $v(0) = v$ und $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} v = u$. Es sei $F : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow V$ die Abbildung $F(s, t) = tv(s)$. Dann

$$d_{(s,t)} F \cdot \partial_s = t \frac{dv}{ds}(s), \quad d_{(s,t)} F \cdot \partial_t = v(s).$$

Wir haben daher $f(t) = g_{F(0,t)}^p(d_{(0,t)} F \cdot \partial_s, d_{(0,t)} F \cdot \partial_t)$ und wir können nun die Ableitung nach t nehmen:

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(g_{F(0,t)}^p(d_{(0,t)} F \cdot \partial_s, d_{(0,t)} F \cdot \partial_t) \right) \\ &= g_{F(0,t)}^p({}^F \nabla_{\partial_t} d_{(0,t)} F \cdot \partial_s, d_{(0,t)} F \cdot \partial_t) + g_{F(0,t)}^p(d_{(0,t)} F \cdot \partial_s, {}^F \nabla_{\partial_t} d_{(0,t)} F \cdot \partial_t) \\ &= g_{F(0,t)}^p({}^F \nabla_{\partial_s} d_{(0,t)} F \cdot \partial_t, d_{(0,t)} F \cdot \partial_t) + g_{F(0,t)}^p(d_{(0,t)} F \cdot \partial_s, 0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left(g_{F(s,t)}^p(d_{(s,t)} F \cdot \partial_t, d_{(s,t)} F \cdot \partial_t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left(g_{tv(s)}^p(v(s), v(s)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (r^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir haben in der zweiten Gleichung die Erhaltung der Metrik für die Pullback-Ableitung benutzt, in der dritten die Symmetrie der Pullback-Ableitung und dass $t \mapsto F(0, t)$ eine Geodätische ist, in der vierten nochmal die Erhaltung der Metrik für die Pullback-Ableitung, in der sechsten den ersten Teil des Lemmas von Gauß. \square

Bemerkung* 4.40. Die Formel (4.19) lässt sich in Dimension zwei als

$$g^p = dr^2 + a^2(r, \phi)d\phi^2$$

schreiben, wobei ϕ die Winkelkoordinate auf $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist und $a : [0, \epsilon) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow (0, +\infty)$ eine glatte Funktion mit $a(0, \phi) = 0$. Wir wollen nun zeigen, dass

$$\frac{\partial a}{\partial r}(0, \phi) = 1.$$

Es sei dazu $\phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fest und $v := (\cos(\phi), \sin(\phi)) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren das glatte Vektorfeld $X(q) := \cos(\phi + \pi/2)\partial_x|_q + \sin(\phi + \pi/2)\partial_y|_q$, $q \in B_\epsilon^2$ auf einem kleinen Ball B_ϵ^2 in \mathbb{R}^2 um 0. Dann $X(rv) = \frac{\partial \phi}{r}$ für $r \in (0, \epsilon)$ und

$$1 = |X(0)|_0 = \lim_{r \rightarrow 0} |X(rv)|_{rv} = \lim_{r \rightarrow 0} |\partial_\phi/r|_{rv} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{a(r)}{r} = \frac{\partial a}{\partial r}(0, \phi). \quad \triangle$$

Die Darstellung (4.19) charakterisiert eigentlich normale Polarkoordinaten.

Satz 4.41. *Es sei $x : U \rightarrow V$ eine Karte um p mit $x(p) = 0$ und V sternförmig bezüglich 0. Es sei angenommen, dass*

$$(x^{-1} \circ \rho)^*g = dr^2 + h_r$$

für einen Pfad von Metriken auf offenen Mengen in S^{n-1} . Dann sind x Normalkoordinaten.

Beweis. Wir setzen $\tilde{g} = (x^{-1} \circ \rho)^*g$ und zeigen, dass $\tilde{g}_0 = g_{\mathbb{R}^n}$. Für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\tilde{g}_0(v, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{g}_{tv}(v, v) = g_{\mathbb{R}^n}(v, v) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{g}_{tv}(\partial_r, \partial_r) = g_{\mathbb{R}^n}(v, v) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} 1 = g_{\mathbb{R}^n}(v, v).$$

Nach Aufgabe 5-3 gilt $\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$. Also ist $t \mapsto x^{-1}(tx_0)$ für $t \in [0, 1]$ eine Geodätische in M für alle $x_0 \in V$. Wenn $v_0 = \sum_i x_0^i \partial_{x^i}|_p$ dann $x^{-1}(x_0) = \gamma_{v_0}(1) = \exp_p(v_0)$. Da $\tilde{g}_0 = g_{\mathbb{R}^n}$ folgt $v_0 = \beta(x_0)$. Wir sehen, dass $\exp_p = \beta \circ x$, sodass x Normalkoordinaten sind. \square

Beispiel 4.42. Wir konstruieren nun \exp_p für \mathbb{R}^n , S_R^n und H_R^n . Für \mathbb{R}^n nehmen wir $p = 0$ und finden

$$\exp_0^{\mathbb{R}^n}(v) = v,$$

also $\mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^n$, $\exp_0^{\mathbb{R}^n}$ ist die Identität und

$$g_{\mathbb{R}^n}^0 = g_{\mathbb{R}^n} = dr^2 + r^2 g_{S^{n-1}}.$$

Für S_R^n nehmen wir als p den Nordpol $\nu = (0, R) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und berechnen nach Aufgabe 5-4

$$\exp_\nu^{S_R^n}(v) = \cos\left(\frac{|v|}{R}\right) \cdot \nu + \sin\left(\frac{|v|}{R}\right) \cdot \frac{R}{|v|}v, \quad \forall v \in T_\nu S_R^n \cong \mathbb{R}^n.$$

Also ist $\mathcal{E}_\nu = \mathbb{R}^n$. Es ist leicht zu sehen, dass $\exp_\nu^{S_R^n} : B_{\pi R}^{\text{euk}}(0) \rightarrow S_R^n \setminus \{-\nu\}$ ein Diffeomorphismus ist aber $\exp_\nu^{S_R^n}(v) = -\nu$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = \pi R$. Die Berechnung von Aufgabe 2-3 liefert dazu

$$g_{S_R^n}^\nu = dr^2 + \left(R \sin\left(\frac{r}{R}\right) \right)^2 g_{S^{n-1}}.$$

Für H_R^n nehmen wir immer noch $p = \nu$ und berechnen nach Aufgabe 5-4

$$\exp_\nu^{H_R^n}(v) = \cosh\left(\frac{|v|}{R}\right) \cdot \nu + \sinh\left(\frac{|v|}{R}\right) \cdot \frac{R}{|v|}v, \quad \forall v \in T_\nu H_R^n \cong \mathbb{R}^n.$$

Also ist $\mathcal{E}_\nu = \mathbb{R}^n$. Es ist leicht zu sehen, dass $\exp_\nu^{H_R^n}$ ein Diffeomorphismus auf dem ganzen \mathbb{R}^n ist. Die Berechnung von Aufgabe 2-3 liefert dazu

$$g_{H_R^n}^\nu = dr^2 + \left(R \sinh\left(\frac{r}{R}\right) \right)^2 g_{S^{n-1}}.$$

Wir führen daher die folgende Notation ein. Für $c \in \mathbb{R}$ definieren wir eine Metrik g_c auf $B_{r_c}^{\text{euk}}(0) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $r_c = +\infty$ falls $c \leq 0$ und $r_c = \pi R$ falls $c > 0$. In Polarkoordinaten ist die Metrik definiert als

$$g_c = dr^2 + \text{sn}_c^2(r) g_{S^{n-1}},$$

wobei

$$\text{sn}_c(r) = \begin{cases} R \sinh(r/R) & \text{falls } c = -\frac{1}{R^2} < 0, \\ r & \text{falls } c = 0, \\ R \sin(r/R) & \text{falls } c = \frac{1}{R^2} > 0. \end{cases} \quad \triangle$$

Als erste wichtige Folgerung des Lemmas von Gauß zeigen wir, dass wenn $p \in M$ beliebig ist und $q \in M$ zu einer geodätischen Sphäre $S_r(p)$ gehört, dann existiert eindeutig eine minimierende Kurve von p nach q : sie ist die Geodätische $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ wobei $v = \exp_p^{-1}(q)$.

Satz 4.43. *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $S_{r_0}(p)$ eine geodätische Sphäre mit Radius $r_0 > 0$ und Mittelpunkt p . Es sei $q \in S_{r_0}(p)$ mit $v = \exp_p^{-1}(q)$. Dann ist $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ eine minimierende Kurve von p nach q*

$$d_g(p, q) = L_g(\gamma_v) = |v|_p = r_0.$$

Wenn $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine weitere minimierende stückweise glatte Kurve von p nach q ist, dann gilt $\gamma(t) = \gamma_v(\varphi(t))$ für alle $t \in [0, 1]$, wobei $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stückweise glatt und explizit als $t \mapsto \varphi(t) = \frac{1}{r_0} L_g(\gamma|_{[0,t]})$ gegeben ist.

Wenn $p_1 \in M$ ein zusätzlicher Punkt mit der Eigenschaft

$$d_g(p, q) = d_g(p, p_1) + d_g(p_1, q) \tag{4.20}$$

ist, dann $p_1 = \gamma_v\left(\frac{1}{r_0} d_g(p, p_1)\right)$.

Außerdem gilt

$$S_{r_0}(p) = \{p' \in M \mid d_g(p, p') = r_0\}.$$

Es folgt, dass $B_{r_0}(p) = \{p' \in M \mid d_g(p, p') < r_0\}$ und $\bar{B}_{r_0}(p) = \{p' \in M \mid d_g(p, p') \leq r_0\}$.

Beweis. Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Wir setzen $t_0 := \max\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) = p\}$ und $t_1 := \min\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in S_{r_0}(p)\}$. Dann $\gamma|_{(t_0, t_1)} \subset B_{r_0}(p) \setminus \{p\}$ und können wir $\gamma|_{(t_0, t_1)} = (r_\gamma, y_\gamma)$ in normalen Polarkoordinaten schreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} L_g(\gamma) &\geq L_g(\gamma|_{(t_0, t_1)}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}_\gamma(t)^2 + h_{r_\gamma(t)}^p(\dot{y}_\gamma(t), \dot{y}_\gamma(t))} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} |\dot{r}_\gamma(t)| dt \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} \dot{r}_\gamma(t) dt \quad (4.21) \\ &= r_\gamma(t_1) - r_\gamma(t_0) \\ &= r_0. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass γ_v minimierend ist. Wenn γ auch minimierend ist, sind alle die obigen Ungleichungen tatsächlich Gleichungen. Nach der ersten Ungleichung müssen $\gamma|_{[0, t_0]}$ und $\gamma|_{[t_1, 1]}$ konstant sein. Nach der zweiten muss y_γ konstant sein und nach der dritten muss r_γ monoton steigen sein. Also

$$(r_\gamma(t), y_\gamma(t)) = (r_0\varphi(t), y_0) = (r_{\gamma_v}(\varphi(t)), y_{\gamma_v}(\varphi(t)))$$

für eine monoton steigende stückweise glatte Funktion $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Es gilt dazu

$$L_g(\gamma|_{[0, t]}) = \int_0^t \dot{\varphi}(t) |\dot{\gamma}_v(\varphi(t))| dt = r_0\varphi(t).$$

Das obige Argument zeigt, dass $S_{r_0}(p) \subset \{p' \in M \mid d_g(p, p') = r_0\}$. Wir zeigen nun die andere Inklusion. Es sei $p' \notin S_{r_0}(p)$. Wenn $p' \in B_{r_0}(p) = \{p\} \cup \sqcup_{r < r_0} S_r(p)$ dann gilt $d_g(p, p') < r_0$. Wenn $p' \notin \bar{B}_{r_0}(p)$ dann gibt es $\epsilon > 0$, sodass $p' \notin \bar{B}_{r_0+\epsilon}(p)$. Wenn $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = p'$ ist, dann gibt es $t \in [0, 1]$ mit $\gamma(t) \in S_{r_0+\epsilon}(p)$ und

$$L_g(\gamma) \geq L_g(\gamma|_{[0, t]}) \geq d_g(p, \gamma(t)) = r_0 + \epsilon.$$

Da γ beliebig war, folgt $d_g(p, p') \geq r_0 + \epsilon$. Das zeigt die Aussage über $S_{r_0}(p)$. Die Aussagen über $B_{r_0}(p)$ und $\bar{B}_{r_0}(p)$ sind nun leicht zu beweisen (wie?).

Es bleibt nun die Aussage über den Punkt $p_1 \in M$, welcher (4.20) erfüllt, zu zeigen. Aus (4.20) folgt $d_g(p, p_1) \leq d_g(p, q) = r_0$ und $d_g(p, p_1) = r_0$ gilt genau dann, wenn $p_1 = q$. Wir wollen nun zeigen, dass

$$\exists t \in [0, 1], \quad p_1 = \gamma_v(t). \quad (4.22)$$

Es sei per Widerspruch angenommen, dass das nicht der Fall ist. Dann ist $p_1 = (r_1, y_1)$ mit $r_1 \in (0, r)$ und $y_1 \neq y_0$ in normalen Polarkoordinaten, wobei $q = (r_0, y_0)$ in diesen Koordinaten. Nun nehmen wir ein $\epsilon \in (0, r_1)$, sodass der abgeschlossene geodätische Ball $\bar{B}_{r_0+\epsilon}(p)$ existiert. Es sei weiter U eine Umgebung von y_1 in S^{m-1} , sodass $y_0 \notin U$. Wir behaupten nun, dass bis auf ϵ und U kleiner zu machen, ein Diffeomorphismus $F : U \rightarrow B_{2\epsilon}^{m-1}$ existiert, sodass $F(y_1) = 0$ und für alle $r \in [r_1 - \epsilon, r_0 + \epsilon]$ gilt

$$(F^{-1})^* h_r^p \geq g_{\mathbb{R}^{m-1}}, \quad \text{auf } \bar{B}_\epsilon^{m-1}. \quad (4.23)$$

Es sei dafür $G : U \rightarrow B_2^{m-1}$ eine Karte mit $G(y_1) = 0$. Da $r \mapsto h_r^p$ glatt ist und \bar{B}_1^{m-1} kompakt ist, existiert ein $\epsilon > 0$, sodass für alle $r \in [r_1 - \epsilon, r_0 + \epsilon]$

$$(G^{-1})^* h_r^p \geq \epsilon^2 g_{\mathbb{R}^{m-1}} \quad \text{auf } \bar{B}_1^{m-1}.$$

Nun betrachten wir die Streckung $\mu : B_{2\epsilon}^{m-1} \rightarrow B_{2\epsilon}^{m-1}$, $\mu(x) = \epsilon x$. Da $(\mu^{-1})^*(\epsilon^2 g_{\mathbb{R}^{m-1}}) = g_{\mathbb{R}^{m-1}}$, sehen wir, dass $F := \mu \circ G$ der gewünschte Diffeomorphismus ist.

Wir definieren mittels F den Diffeomorphismus $\tilde{F} : [r_1 - \epsilon, r_0 + \epsilon] \times U \rightarrow [r_1 - \epsilon, r_0 + \epsilon] \times B_{2\epsilon}^{m-1}$, $\tilde{F}(r, y) = (r, F(y))$, sodass nach (4.19) die untere Schranke

$$(\tilde{F}^{-1})^* g \geq g_{\mathbb{R}^m} \quad \text{auf } [r_1 - \epsilon, r_0 + \epsilon] \times B_\epsilon^{m-1} \quad (4.24)$$

gilt.

Wir benutzen nun \tilde{F} um $d_g(p_1, q)$ von unten abzuschätzen. Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p_1$ und $\gamma(1) = q$. Wir definieren

$$t_0 := \max \left\{ t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in [r_1 - \epsilon, r_0 + \epsilon] \times F^{-1}(B_\epsilon^{m-1}) \right\}.$$

Es sei $(r_\gamma, y_\gamma) : [0, t_0] \rightarrow [r_1 - \epsilon, r_0 + \epsilon] \times F^{-1}(B_\epsilon^{m-1})$ die Darstellung von $\gamma|_{[0, t_0]}$ in normalen Polarkoordinaten. Wir haben drei Möglichkeiten:

- (i) $r_\gamma(t_0) = r_1 - \epsilon$;
- (ii) $r_\gamma(t_0) = r_0 + \epsilon$;
- (iii) $y_\gamma(t_0) \in F^{-1}(S_\epsilon^{m-2})$.

Im ersten Fall gilt mit Hilfe einer Berechnung, die sehr ähnlich zu (4.21) ist, dass

$$L_g(\gamma) \geq L_g(\gamma|_{[t_0, 1]}) \geq r_0 - (r_1 - \epsilon) = r_0 - r_1 + \epsilon = d_g(p, q) - d_g(p, p_1) + \epsilon.$$

Im zweiten Fall gilt mit Hilfe einer Berechnung, die sehr ähnlich zu (4.21) ist, dass

$$L_g(\gamma) \geq L_g(\gamma|_{[0, t_0]}) \geq r_0 - r_1 + \epsilon = d_g(p, q) - d_g(p, p_1) + \epsilon.$$

Im dritten Fall gilt

$$\begin{aligned} L_g(\gamma) &\geq L_g(\gamma|_{[0, t_0]}) + L_g(\gamma|_{[t_0, 1]}) \\ &\geq L_{g_{\mathbb{R}^n}}(\tilde{F} \circ \gamma|_{[0, t_0]}) + |r_0 - r_\gamma(t_0)| \\ &\geq d_{\mathbb{R}^m}((r_1, 0), (r_\gamma(t_0), y_\gamma(t_0))) + |r_0 - r_\gamma(t_0)| \\ &\geq \sqrt{|r_\gamma(t_0) - r_1|^2 + \epsilon^2} + |r_0 - r_\gamma(t_0)| \\ &= |r_\gamma(t_0) - r_1| + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{|r_\gamma(t_0) - r_1|^2 + \epsilon^2} + |r_\gamma(t_0) - r_1|} + |r_0 - r_\gamma(t_0)| \\ &\geq r_0 - r_1 + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{r_0^2 + \epsilon^2} + r_0} \\ &= d_g(p, q) - d_g(p, p_1) + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{r_0^2 + \epsilon^2} + r_0}, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt (4.24) und (4.21) und im fünften Schritt die Identität

$$\sqrt{a^2 + b^2} - a = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + a}, \quad \forall a, b \in (0, \infty)$$

benutzt haben. Da γ beliebig war, folgt der Widerspruch

$$d_g(p_1, q) - d_g(p, q) + d_g(p, p_1) \geq \min \left\{ \epsilon, \frac{\epsilon^2}{\sqrt{r_0^2 + \epsilon^2} + r_0} \right\} > 0. \quad \square$$

Der obige Satz gibt uns das folgende Resultat. Wenn $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ eine Geodätische ist, dann ist γ_v minimierend zwischen $\gamma_v(t_0)$ und $\gamma_v(t_1)$, falls $|v|(t_1 - t_0) < \text{inj}_{\gamma_v(t_0)}(M, g)$. Das sagt uns fast, dass γ lokal minimierend ist. Das Problem ist aber, dass wir noch nicht wissen, wie der Injektivitätsradius $\text{inj}_{\gamma_v(t_0)}(M, g)$ vom Punkt $\gamma_v(t_0)$ abhängt. Das wollen wir im nächsten Abschnitt verstehen.

4.7 Gleichmäßige Normalumgebungen und lokal minimierende Kurven

Definition 4.44. Es sei (M, g) eine R-Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Eine offene Umgebung $W \subset M$ von p heißt gleichmäßige Normalumgebung von p , wenn ein $r > 0$ existiert, sodass für jedes $q \in W$

(a) der geodätische Ball $B_r(q)$ existiert (also $\text{inj}_q(M, g) \geq r$),

(b) $W \subset B_r(q)$. △

Bemerkung 4.45. Die entscheidende Eigenschaft in der Definition ist (a). Wenn W' eine Umgebung von p ist, die (a) erfüllt, dann ist $W := W' \cap B_{r/2}(p)$ eine gleichmäßige Normalumgebung von p . Eigenschaft (a) für W ist klar, da $W \subset W'$. Für (b) nehmen wir $q \in W$ und bemerken, dass $W \subset B_{r/2}(p) \subset B_r(q)$ nach der Dreiecksungleichung denn $B_{r/2}(p)$ ist auch der metrische Ball nach Satz 4.43. △

Hilfssatz 4.46. Jedes $p \in (M, g)$ besitzt eine gleichmäßige Normalumgebung.

Beweis. Wir betrachten die glatte Abbildung $\text{Exp} : \mathcal{E} \rightarrow M \times M$, $\text{Exp}(v) = (\pi(v), \exp(v))$. Wir haben $\text{Exp}(0_p) = (p, p)$ und wir wollen $d_{0_p} \text{Exp} : T_{0_p}(TM) \rightarrow T_p M \times T_p M$ berechnen. Wir werden den Isomorphismus

$$T_p M \times T_p M \rightarrow T_{0_p}(TM), \quad (u_1, u_2) \mapsto \frac{d}{dt}(0_{\gamma(t)}) + \frac{d}{dt}(tu_2)$$

benutzen, wobei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine Kurve mit $\dot{\gamma}(0) = u_1$ ist. Dann

$$\begin{aligned} d_{0_p} \pi \cdot (u_1, u_2) &= \frac{d}{dt} \pi(0_{\gamma(t)}) + \frac{d}{dt} \pi(tu_2) = \frac{d}{dt} \gamma(t) + \frac{d}{dt} p = u_1, \\ d_{0_p} \exp \cdot (u_1, u_2) &= \frac{d}{dt} \exp(0_{\gamma(t)}) + \frac{d}{dt} \exp(tu_2) = \frac{d}{dt} \gamma(t) + \frac{d}{dt} \exp_p(tu_2) = u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Also haben wir die Blockdarstellung

$$d_{0_p} \text{Exp} = \begin{pmatrix} \text{id}_{T_p M} & 0 \\ \text{id}_{T_p M} & \text{id}_{T_p M} \end{pmatrix}$$

und daher ist $d_{0_p} \text{Exp}$ invertierbar. Nach dem Satz der Umkehrabbildung existieren Umgebungen \mathcal{U} von 0_p und \mathcal{V} von (p, p) , sodass die Einschränkung $\text{Exp} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ ein Diffeomorphismus ist. Bis auf Einschränkung von \mathcal{U} können wir annehmen, dass es eine Umgebung $W' \subset M$ von p und eine positive Zahl $r > 0$ existieren, sodass

$$\mathcal{U} = \{v \in TM \mid \pi(v) \in W', |v|_g < r\}.$$

Dann ist $\text{Exp}|_{B_r^{T_q M}} : B_r^{T_q M} \rightarrow \{q\} \times \mathcal{V}_q := \{q' \in M \mid (q, q') \in \mathcal{V}\}$ für alle $q \in W'$ ein Diffeomorphismus, wobei \mathcal{V}_q eine Umgebung von p in M ist. Nach Definition gilt $\text{Exp}|_{B_r^{T_q M}} = (q, \exp_q)$, sodass $\exp_q : B_r^{T_q M} \rightarrow \mathcal{V}_q$ ein Diffeomorphismus ist. Das zeigt Eigenschaft (a) in Definition 4.44. Nach Bemerkung 4.45 ist $W := W' \cap B_{r/2}(p)$ eine gleichmäßige Normalumgebung. \square

Aufgabe 4.47. Zeigen Sie, dass der globale Injektivitätsradius $\text{inj}(M, g)$ positiv ist, falls M kompakt ist. Anders gesagt, gibt es $r > 0$, sodass für alle $p \in M$ ein geodätischer Ball $B_r(p)$ mit Radius r und Mittelpunkt p existiert. \triangle

Wir sind bereit die gewünschte Charakterisierung von Geodätischen zu beweisen.

Satz 4.48. *Es sei (M, g) eine R -Mannigfaltigkeit und $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine stückweise Immersion. Es gilt: Die Parametrisierung von γ mit konstanter Geschwindigkeit ist eine Geodätische genau dann, wenn γ lokal minimierend ist.*

Beweis. Wir bemerken, dass lokal minimierend zu sein unabhängig von der Parametrisierung ist, sodass wir annehmen dürfen, dass γ mit konstanter Geschwindigkeit $a > 0$ parametrisiert ist. Eine solche Parametrisierung existiert nach Folgerung 3.48 denn γ ist eine stückweise Immersion.

Wir nehmen $t \in [t_0, t_1]$ und eine gleichmäßige Normalumgebung W von $\gamma(t)$. Dann existiert ein $r > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $p \in W$ der geodätische Ball $B_r(p)$ existiert. Da γ stetig ist, existiert ein Intervall $(t - \epsilon, t + \epsilon)$, sodass $\gamma((t - \epsilon, t + \epsilon)) \subset W$ und wir nehmen $s, s' \in (t - \epsilon, t + \epsilon)$ mit $s < s'$ beliebig.

Es sei nun angenommen, dass γ eine Geodätische ist. Dann ist $\gamma|_{[s, s']}$ eine Geodätische mit Anfangspunkt $\gamma(s)$, welche im geodätischen Ball $B_r(\gamma(s))$ enthalten ist. Nach Satz 4.43 ist $\gamma|_{[s, s]}$ minimierend. Es folgt, dass γ lokal minimierend ist.

Es sei andersrum angenommen, dass γ lokal minimierend und mit konstanter Geschwindigkeit $a > 0$ parametrisiert ist. Wir nehmen $s, s' \in (t - \epsilon, t + \epsilon)$, sodass $s < t < s'$. Nach Definition von lokal minimierenden Kurven ist $\gamma|_{[s, s]}$ minimierend. Dann bis auf Umparametrisierung ist γ eine Geodätische. Da die Parametrisierung mit selber konstanter Geschwindigkeit und selbem Definitionsintervall eindeutig ist, gilt $\gamma = \gamma_u$, wobei $\gamma_u : [s, s'] \rightarrow M$ eine Geodätische mit $|u| = a$. Also gilt ${}^\nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = 0$ in einer Umgebung von t . Da t beliebig war, folgt, dass γ eine Geodätische ist. \square

Folgerung 4.49. *Es sei $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine stückweise Immersion, sodass γ minimierend ist: $d_g(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = L_g(\gamma)$. Dann ist die Parametrisierung von γ mit konstanter Geschwindigkeit eine Geodätische.*

Beweis. Man bemerke, dass eine minimierende Kurve ist auch lokal minimierend (siehe Aufgabe 1-4). \square

Bemerkung 4.50. Man kann eigentlich zeigen, dass die Voraussetzung, dass γ eine stückweise Immersion ist, in Folgerung 4.49 unnötig ist: wenn $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine stückweise glatte minimierende Kurve ist, dann existiert eine Geodätische $\gamma_v : [0, L_g(\gamma)] \rightarrow M$ und eine monoton steigende stückweise glatte Funktion $\varphi : [t_0, t_1] \rightarrow [0, L_g(\gamma)]$, sodass $\gamma = \gamma_v \circ \varphi$. Der Beweis ist ähnlich dem Beweis von Satz 2.11, wobei wir die euklidischen Bälle B_i mit gleichmäßigen Normalumgebungen ersetzen müssen. \triangle

Bemerkung 4.51. Die Umkehrung von Satz 4.49 gilt nicht denn viele Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) besitzen Geodätische $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, die nicht minimierend sind. Die klassischen Beispiele sind euklidische Sphäre $(S_R^n, g_{S_R^n})$ und flache Tori $(\mathbb{R}^n/\Gamma, g_{\mathbb{R}^n/\Gamma})$. Es sei $p \in S_R^n$ der Nordpol und $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow S_R^n$ eine Geodätische mit $v \in T_p S_R^n$ mit $|v| = 1$. Dann $\gamma_v(t) = \gamma_{-v}(2\pi R - t)$, sodass

$$L_g(\gamma_v|_{[0,t]}) = t > 2\pi R - t = L_g(\gamma_{-v}|_{[0,2\pi R-t]}) = d_g(p, \gamma_v(t)) \quad \forall t > \pi R.$$

Wir werden sehen, dass die Krümmung der Sphäre für die Tatsache verantwortlich ist, dass $\gamma_v|_{[0,t]}$ nicht minimal ist.

Für flache Tori haben wir viele Geodätische $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$, sodass $\gamma_v(1) = \gamma_v(0)$. Man nehme $\gamma_v(t) = [tv]$, wobei $v \in \Gamma \setminus \{0\}$. Dann ist γ_v nicht minimierend, da $0 = d(\gamma_v(0), \gamma_v(1)) < L(\gamma_v) = |v|$. In diesem Fall ist aber die Hochhebung $t \mapsto tv$ minimierend, also können wir sagen, dass hier die Topologie für die Tatsache verantwortlich ist, dass γ_v nicht minimal ist. \triangle

4.8 Existenz von minimierenden Kurven

Es sei (M, g) eine R-Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Wenn $q \in M$ ein zusätzlicher Punkt ist, wissen wir, dass, eine minimale Kurve von p nach q existiert, falls

$$d_g(p, q) < \text{inj}_p(M, g). \quad (4.25)$$

Wir wollen nun verstehen, was passiert wenn Bedingung (4.25) nicht gilt. Existiert noch eine minimierende Kurve? Wenn ja, ist sie eindeutig? Wie wir schon für offene Teilmengen M des euklidischen Raums gesehen haben, müssen minimierende Kurven nicht unbedingt existieren. Denn minimierende Kurven sind Geradenstücke und wenn M eine nicht konvexe Teilmenge ist, dann können wir zwei Punkte $p, q \in M$ finden, die von einem Geradenstück verbunden sind, welches nicht in M liegt. Also sehen wir, dass in diesem Fall die Geodätischen in M durch p nicht für alle Zeiten definiert sind, eine Bedingung, die zu $\mathcal{E}_p \neq T_p M$ äquivalent ist. Der nächste wichtige Satz besagt, dass andersrum die Bedingung $\mathcal{E}_p = T_p M$ genug ist, um die minimierende Kurve von p nach q zu konstruieren.

Satz 4.52. *Es sei (M, g) eine R -Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt mit $\mathcal{E}_p = T_p M$. Dann existiert für alle $q \in M$ eine minimierende Geodätische von p nach q .*

Bemerkung 4.53. Wie schon in Bemerkung 4.29 gesagt, ist die Bedingung $\mathcal{E}_p = T_p M$ zu der Tatsache äquivalent, dass alle Geodätischen durch p für alle Zeiten definiert sind. \triangle

Bemerkung 4.54. Die Bedingung $\mathcal{E}_p = T_p M$ ist für die Existenz von minimierenden Kurven nicht notwendig, wie das Beispiel von konvexen Teilmengen des euklidischen Raums zeigt. Außerdem ist die minimierende Kurve nicht unbedingt eindeutig, wie das Beispiel der euklidischen Sphäre von Radius R zeigt. Hier treffen sich alle Geodätischen durch den Nordpol zum ersten Mal im Südpol wieder und jedes von diesen geodätischen Stücken besitzt die minimale Länge πR . \triangle

Bemerkung 4.55. Wie der Beweis von Satz 4.52 verdeutlicht, ist es genug $\mathcal{E}_p \supset \bar{B}_{d_g(p,q)}^{T_p M}$ zu fordern, um die Existenz einer minimalen Geodätischen von p nach q zu gewährleisten. \triangle

Beweis. Wir führen zuerst die folgende Definition für beliebige Punkte $p_0, p_1 \in M$. Es sei $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\gamma(t_0) = p_0$. Wir sagen, dass γ eine nach p_1 gerichtete Kurve (mit Anfangspunkt p_0) ist, falls

- (a) γ eine minimierende Geodätische ist;
- (b) die Punkte $p_0 = \gamma(t_0), \gamma(t_1), p_1$ kollinear sind: $d_g(p_0, p_1) = d_g(p_0, \gamma(t_1)) + d_g(\gamma(t_1), p_1)$.

Nach Bedingung (a), der Dreiecksungleichung und der Tatsache, dass $|\dot{\gamma}| = 1$ gilt $d_g(p_0, \gamma(t_1)) = L_g(\gamma) = (t_1 - t_0)$, sodass wir Bedingung (b) als

$$(b') \quad d_g(p_0, p_1) \geq (t_1 - t_0) + d_g(\gamma(t_1), p_1)$$

schreiben können. Wir bemerken, dass wenn $t_1 - t_0 = d_g(p_0, p_1)$, dann $d_g(\gamma(t_1), p_1) = 0$, was $\gamma(t_1) = p_1$ impliziert und γ eine minimierende Kurve von p_0 nach p_1 ist.

Nach dieser Vorbereitung können wir mit dem echten Beweis anfangen. Wir setzen $D := d_g(p, q)$ und wir nehmen einen abgeschlossenen geodätischen Ball $\bar{B}_\epsilon(p)$. Wenn $D \leq \epsilon$ existiert eine minimierende Geodätische nach Satz 4.43. Es sei dann $D > \epsilon$, sodass $q \notin \bar{B}_\epsilon(p)$. Die Funktion $d_g(\cdot, q) : S_\epsilon(p) \rightarrow (0, \infty)$ ist stetig. Da $S_\epsilon(p)$ kompakt ist, existiert ein minimierender Punkt $p_\epsilon \in S_\epsilon(p)$:

$$d_g(p_\epsilon, q) = \min_{p' \in S_\epsilon(p)} d_g(p', q). \quad (4.26)$$

Wir nehmen $v := \frac{1}{\epsilon} \exp_p^{-1}(p_\epsilon)$, sodass $|v|_p = 1$. Wir betrachten die Geodätische $\gamma_v : I_v \rightarrow M$. Da $\mathcal{E}_p = T_p M$ folgt es, dass $I_v = \mathbb{R}$ und wir behaupten, dass $\gamma_v|_{[0,D]}$ eine minimierende Kurve von p nach q ist. Zu diesem Zweck betrachten wir die Menge

$$\mathcal{T} := \{t \in [0, D] \mid \gamma_v|_{[0,t]} \text{ ist nach } q \text{ gerichtet}\}.$$

Da $t \mapsto d_g(p, \gamma_v(t))$, $t \mapsto d_g(\gamma_v(t), q)$, und $t \mapsto L_g(\gamma_v|_{[0,t]})$ stetige Funktionen sind, sehen wir, dass \mathcal{T} eine abgeschlossene Teilmenge von $[0, D]$ ist. Es sei dann $T := \max \mathcal{T}$. Wir wollen

nun zeigen, dass $T = D$, eine Eigenschaft, die impliziert, dass $\gamma_v|_{[0,D]}$ minimierend von p nach q ist.

Als ersten Schritt zeigen wir, dass $T \geq \epsilon$ gilt. Nach Satz 4.43 ist $\gamma_v|_{[0,\epsilon]}$ minimierend von p nach p_ϵ , also gilt (a). Um (b') zu zeigen, nehmen wir $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ beliebig. Da $q \notin \bar{B}_\epsilon(p)$ gilt, existiert ein $t \in [0, 1]$ mit $\gamma(t) \in S_\epsilon(p)$. Nach der Definition von p_ϵ haben wir

$$L_g(\gamma) = L_g(\gamma|_{[0,t]}) + L_g(\gamma|_{[t,1]}) \geq \epsilon + d_g(\gamma(t), q) \geq \epsilon + d_g(p_\epsilon, q) = \epsilon + d_g(\gamma|_{[0,\epsilon]}(\epsilon), q).$$

Da γ beliebig war, bekommen wir (b') aus der Definition der Abstandsfunktion.

Es sei nun per Widerspruch angenommen, dass $T \in [\epsilon, D)$. Wir setzen $p_T := \gamma_v(T)$. Da $T < D$ gilt, ist $p_T \neq q$ und wir nehmen $\bar{B}_\delta(p_T)$, sodass $q \notin \bar{B}_\delta(p_T)$. Wie vorher finden wir $p_{T,\delta} \in S_\delta(p_T)$ und $v_T := \frac{1}{\delta} \exp_{p_T}^{-1}(p_{T,\delta})$, sodass $\gamma_{v_T} : [0, \delta] \rightarrow M$ eine nach q gerichtete Kurve mit Anfangspunkt p_T ist. Wir behaupten nun, dass $\gamma_v|_{[0,T]} * \gamma_{v_T}$ eine nach q gerichtete Kurve mit Anfangspunkt p ist. Wenn die Behauptung stimmt, ist $\gamma_v|_{[0,T]} * \gamma_{v_T}$ eine Geodätische mit Tangentialvektor v in $t = 0$, also gilt $\gamma_v|_{[0,T+\delta]} = \gamma_v|_{[0,T]} * \gamma_{v_T}$, sodass wir die Widerspruch $\max \mathcal{T} = T < T + \delta \in \mathcal{T}$ bekommen. Es bleibt die Behauptung zu zeigen. Wir beweisen erst (b'):

$$d_g(p, q) = T + d_g(p_T, q) = T + \delta + d_g(p_{T,\delta}, q) = T + \delta + d_g((\gamma_v|_{[0,T]} * \gamma_{v_T})(T + \delta), q). \quad (4.27)$$

Wir beweisen dann (a) mit Hilfe von (4.27) und der Dreiecksungleichung für die Punkte $p, p_{T,\delta}, q$:

$$d_g(p, p_{T,\delta}) \geq d_g(p, q) - d_g(p_{T,\delta}, q) = T + \delta = L_g(\gamma_v|_{[0,T]} * \gamma_{v_T}).$$

Das heißt, dass die Kurve $\gamma_v|_{[0,T]} * \gamma_{v_T}$ minimierend ist. Da sie auch nach der Bogenlänge parametrisiert ist, folgt nach Folgerung 4.49, dass sie eine Geodätische ist. Die Behauptung ist bewiesen und somit den ganzen Satz. \square

4.9 Der Satz von Hopf-Rinow

Es bleibt nun die Frage offen, wann $\mathcal{E}_p = T_p M$ für einen Punkt $p \in M$ gilt und ob diese Eigenschaft auch $\mathcal{E}_{p'} = T_{p'} M$ für die anderen Punkte $p' \in M$ impliziert. Der Schlüssel ist der Begriff von Cauchy-Folgen und metrische Vollständigkeit.

Definition 4.56. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(p_i) \subset M$ heißt Cauchy-Folge, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein Index i_ϵ existiert, sodass

$$d(p_i, p_j) < \epsilon, \quad \forall i, j \geq i_\epsilon. \quad (4.28)$$

Ein metrischer Raum heißt (metrisch) vollständig, falls alle Cauchy-Folgen konvergieren. \triangle

Bemerkung 4.57. Es sei (p_i) eine Cauchy-Folge. Dann ist (p_i) genau dann konvergent, wenn eine Teilfolge (p_{i_j}) von (p_i) konvergent ist. Das folgt leicht aus (4.28). \triangle

Bemerkung 4.58. Es sei M ein topologischer Raum M und d_1, d_2 zwei Abstandsfunktionen auf M , welche die Topologie von M induzieren. Es gibt Beispiele, wobei (M, d_1) vollständig ist und (M, d_2) nicht. Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ vollständig, aber $((-1, 1), |\cdot - \cdot|)$ nicht. Trotzdem gibt es ein Homöomorphismus $F : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, sodass $(\mathbb{R}, |F(\cdot) - F(\cdot)|)$ nicht vollständig ist.

Das zeigt, dass im Allgemeinen die Vollständigkeit eine metrische und nicht eine topologische Eigenschaft ist. Das hat aber eine wichtige Ausnahme: Wir sehen nämlich im Satz 4.59, dass alle Abstandsfunktionen auf M vollständig sind, falls M kompakt ist. \triangle

Wir geben nun ein hinreichendes Kriterium für die Vollständigkeit eines metrischen Raums.

Satz 4.59. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $p \in M$ ein Punkt, sodass alle abgeschlossenen, metrischen Bällen von M mit Mittelpunkt p kompakt sind. Dann ist (M, d) vollständig.*

Bemerkung 4.60. Das Kriterium ist nicht notwendig. Man nehme $M = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ mit der Supremum-Norm. \triangle

Bemerkung 4.61. Die Bedingung, dass alle abgeschlossenen metrischen Bälle von M mit gegebenem Mittelpunkt p kompakt sind, ist gleichbedeutend zur Bedingung, dass alle abgeschlossenen metrischen Bälle von M mit beliebigem Mittelpunkt kompakt sind. Denn, wenn $p' \in M$, gilt nach der Dreiecksungleichung, dass $\{q \in M \mid d(p', q) \leq \delta\}$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Teilmenge $\{q \in M \mid d(p, q) \leq d(p, p') + \delta\}$. Da abgeschlossene Teilmenge von kompakten Räumen wieder kompakt sind, folgt die Äquivalenz. \triangle

Beweis. Es sei (p_i) eine Cauchy-Folge. Wir wählen ein beliebiges ϵ in (4.28) und setzen

$$\delta := \max \left\{ d(p, p_1), \dots, d(p, p_{i_\epsilon-1}), d(p, p_{i_\epsilon}) + \epsilon \right\}$$

Dann gilt $(p_i) \subset \{q \in M \mid d(p, q) \leq \delta\}$ und (p_i) besitzt eine konvergente Teilfolge denn $\{q \in M \mid d(p, q) \leq \delta\}$ ist nach Voraussetzung kompakt. Wir leiten aus Bemerkung 4.57 her, dass (p_i) konvergent ist. \square

Wir sind nun bereit, die Bedingung $\mathcal{E}_p = T_p M$ in Verbindung zur metrischen Vollständigkeit zu setzen.

Satz 4.62 (Hopf–Rinow). *Es sei (M, g) eine R -Mannigfaltigkeit. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

- (a) *es gibt $p \in M$ mit $\mathcal{E}_p = T_p M$;*
- (b) *für alle $p \in M$ gilt $\mathcal{E}_p = T_p M$, d.h. alle Geodätischen sind für alle Zeiten definiert;*
- (c) *(M, d_g) ist metrisch vollständig ist;*
- (d) *die abgeschlossenen metrischen Bällen von M sind kompakt.*

Beweis. Wir zeigen die Kette von Implikationen $(d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (d)$. Die Implikation $(d) \Rightarrow (c)$ wurde in Satz 4.59 bewiesen. Wir zeigen nun $(c) \Rightarrow (b)$. Es sei $v \in TM$ beliebig und $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ die maximale Geodätische mit Anfangsvektor v . Es sei per Widerspruch angenommen, dass $I_v \cap [0, \infty) = [0, T)$ für $T < \infty$. Wir nehmen eine monoton steigende Folge $(t_i) \in [0, T)$ mit $t_i \rightarrow T$. Dann gilt für $i \leq j$

$$d_g(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq L_g(\gamma|_{[t_i, t_j]}) = |v|(t_j - t_i),$$

sodass $(\gamma(t_i))$ eine Cauchy-Folge ist. Nach (c) besitzt diese Folge einen Limes $p \in M$. Es sei W eine gleichmäßige Normalumgebung von p , sodass es $\delta > 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass $\text{inj}_q(M, g) \geq \delta$ für alle $q \in W$. Wir nehmen ein Index i , sodass $\gamma(t_i) \in W$ und $T - t_i < \frac{\delta}{|v|}$. Dann existiert die Geodätische $\gamma_{\dot{\gamma}_v(t_i)} : [0, \delta/|v|] \rightarrow M$. Daher ist $\gamma_v|_{[0, t_i]} * \gamma_{\dot{\gamma}_v(t_i)}$ eine Geodätische auf dem Intervall $[0, t_i + \delta/|v|] \supset [0, T]$ mit Anfangsvektor v . Das widerspricht die Definition von T und wir schließen, dass $[0, +\infty) \subset I_v$. Auf ähnlicher Weise zeigen wir, dass $(-\infty, 0] \subset I_v$, sodass $I_v = \mathbb{R}$. Da $v \in TM$ beliebig war, sehen wir, dass alle Geodätischen für alle Zeiten definiert sind. Das zeigt (b).

Die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ ist unmittelbar und es bleibt $(a) \Rightarrow (d)$ zu beweisen. Es sei $p \in M$ mit $\mathcal{E}_p = T_p M$. Nach Bemerkung 4.61 ist es genug zu zeigen, dass für alle $\delta > 0$ der metrische Ball $\{q \in M \mid d_g(p, q) \leq \delta\}$ kompakt ist. Es sei $q \in M$, dann existiert nach Satz 4.52 ein $v \in T_p M$ und eine Geodätische $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ mit $d_g(p, q) = L_g(\gamma_v) = |v|$. Also gilt $q = \exp_p(v)$ und $|v| = d_g(p, q)$. Es folgt, dass

$$\{q \in M \mid d_g(p, q) \leq \delta\} \subset \exp_p(\bar{B}_\delta^{T_p M}).$$

Die Menge $\exp_p(\bar{B}_\delta^{T_p M})$ ist kompakt als stetige Abbildung der kompakten Menge $\bar{B}_\delta^{T_p M}$. Daher ist der Ball $\{q \in M \mid d_g(p, q) \leq \delta\}$ auch kompakt denn er ist eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge. \square

4.10 Geodätische Vollständigkeit

Definition 4.63. Wir sagen, dass eine PR-Mannigfaltigkeit (M, g) geodätisch vollständig ist, wenn das Vektorfeld Γ vollständig ist (das heißt $I_v = \mathbb{R}$ für alle maximalen Geodätischen). \triangle

Aus dem Satz von Hopf-Rinow bekommen wir das folgende Resultat.

Folgerung 4.64. *Eine kompakte R-Mannigfaltigkeit (M, g) ist geodätisch vollständig.* \square

Bemerkung 4.65. Wir sehen im Blatt 7, dass die Aussage in Folgerung 4.64 für allgemeine PR-Mannigfaltigkeiten nicht gilt: Es existiert eine kompakte PR-Mannigfaltigkeit, die nicht geodätisch vollständig ist. \triangle

Wir wollen nun verstehen, ob sich die geodätische Vollständigkeit durch Abbildungen zwischen PR-Mannigfaltigkeit vererbt. Wir betrachten zuerst den Fall einer isometrischen Immersion $F : (N, g^N) \rightarrow (M, g^M)$. Da $F(N)$ nur eine Teilmenge von M ist, haben

wir keine Chance aus der Vollständigkeit von (N, g^N) die Vollständigkeit von (M, g^M) zu schließen. Es sei dann angenommen, dass (M, g^M) vollständig ist. Auch in diesem Fall die im Abschnitt 5.4 in DG1 definierte injektive Immersion mit abgeschlossenem Bild $F : (-\pi, \pi) \rightarrow (R^2, g_{\mathbb{R}^2})$ zeigt, dass (N, g^N) nicht immer vollständig ist. Auch wenn wir nur Einbettungen F betrachten, haben wir das Beispiel von $((0, 1), g_{\mathbb{R}}) \subset (\mathbb{R}, g_{\mathbb{R}})$, wobei $((0, 1), g_{\mathbb{R}})$ nicht vollständig ist. Wenn schließlich F eine Einbettung mit abgeschlossenem Bild und (M, g^M) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, haben wir ein positives Resultat, das im Aufgabenblatt 7 bewiesen wird.

Satz 4.66. *Es sei $F : (N, g^N) \rightarrow (M, g^M)$ eine Riemannsche Einbettung, sodass $F(N)$ abgeschlossen in M ist. Wenn (M, g^M) vollständig ist, dann ist auch (N, g^N) vollständig. Insbesondere sind abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten wieder vollständig.* \square

Bemerkung 4.67. Der obige Satz ist falsch für PR-Mannigfaltigkeit. Wir wissen nämlich, dass jede PR-Mannigfaltigkeit in einem flachen Raum $(\mathbb{R}^{n_1, n_2}, g_{\mathbb{R}^{n_1, n_2}})$ eingebettet werden kann. Das gilt auch für den Clifton–Pohl Torus vom Blatt 7. Das ist aber eine kompakte unvollständige PR-Mannigfaltigkeit. Daher ist ihr Bild durch eine Einbettung kompakt und somit abgeschlossen. \triangle

Wir betrachten nun die geodätischen Vollständigkeit, wenn wir eine PR-Submersion $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ haben. Wenn (M, g) vollständig ist, ist (\tilde{M}, \tilde{g}) nicht unbedingt vollständig. Man nehme zum Beispiel $(\tilde{M}, \tilde{g}) = (M \times (0, 1), g_M + g_{\mathbb{R}})$. Wir sehen aber im Blatt 7, dass die Umkehrung gilt.

Satz 4.68. *Es sei $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine PR-Submersion. Wenn $\tilde{v} \in T\tilde{M}$ horizontal ist und $v := dF \cdot \tilde{v}$, dann ist $\hat{\gamma}_{\tilde{v}}(t)$ horizontal für alle $t \in I_{\tilde{v}}$ und*

$$\gamma_v|_{I_{\tilde{v}}} = F \circ \hat{\gamma}_{\tilde{v}}, \quad I_{\tilde{v}} \subset I_v.$$

Insbesondere gilt die Implikation: (\tilde{M}, \tilde{g}) vollständig $\Rightarrow (M, g)$ vollständig. \square

Für den Fall von PR-Überlagerung ist die Vollständigkeit von (M, g) und (\tilde{M}, \tilde{g}) tatsächlich äquivalent.

Satz 4.69. *Es sei $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine PR-Überlagerung. Es sei $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ mit $v := d_{\tilde{p}}F \cdot \tilde{v}$. Dann $F \circ \hat{\gamma}_{\tilde{v}}$ ist eine Geodätische mit Anfangsvektor v . Umgekehrt ist die topologische Hochhebung $\tilde{\gamma}_{\tilde{v}}$ von γ_v mit $\tilde{\gamma}_{\tilde{v}}(0) = \tilde{p}$ eine Geodätische mit Anfangsvektor \tilde{v} . Daraus folgt $I_v = I_{\tilde{v}}$ und die Äquivalenz: (\tilde{M}, \tilde{g}) vollständig $\iff (M, g)$ vollständig.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Hilfssatz 4.21. Die zweite Aussage ist eine unmittelbare Folgerung davon. \square

Mit Hilfe des Satzes von Hopf-Rinow haben wir ein besseres Resultat für Riemannsche Mannigfaltigkeiten: wenn (\tilde{M}, \tilde{g}) eine vollständige R-Mannigfaltigkeit und $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine lokale Isometrie ist, dann ist F automatisch eine Überlagerung und wir können den Injektivitätsradius von (\tilde{M}, \tilde{g}) durch den von (M, g) abschätzen.

Satz 4.70. *Es sei (\tilde{M}, \tilde{g}) eine vollständige R-Mannigfaltigkeit und $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine lokale Isometrie. Dann ist F eine R-Überlagerung. Außerdem gilt für alle $p \in M$:*

$$\text{inj}_{\tilde{p}}(\tilde{M}, \tilde{g}) \geq \text{inj}_p(M, g), \quad d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, \tilde{p}') \geq 2\text{inj}_p(M, g), \quad \forall \tilde{p}, \tilde{p}' \in F^{-1}(p), \quad \tilde{p} \neq \tilde{p}'.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass (M, g) vollständig ist. Es sei $\tilde{p} \in \tilde{M}$ und $p := F(\tilde{p})$. Es sei $v \in T_p M$ und $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ mit $d_{\tilde{p}} F \cdot \tilde{v} = v$. Dann ist $F \circ \gamma_{\tilde{v}}$ eine Geodätische mit Anfangsvektor v . Daher: $I_v \supset I_{\tilde{v}} = \mathbb{R}$. Da $v \in T_p M$ beliebig war, folgt, dass $\mathcal{E}_p = T_p M$. Nach dem Satz von Hopf-Rinow ist (M, g) vollständig.

Wir zeigen nun, dass F surjektiv ist. Es sei $q \in M$ beliebig. Da $\mathcal{E}_p = T_p M$ gilt, existiert eine Geodätische $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma_v(0) = p$ und $\gamma_v(1) = q$. Es sei $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ mit der Eigenschaft, dass $v = d_{\tilde{p}} F \cdot \tilde{v}$. Da \tilde{M} vollständig ist, ist $I_{\tilde{v}} = \mathbb{R}$. Dann ist $F \circ \gamma_{\tilde{v}}$ eine Geodätische mit Anfangsvektor v . Daher: $F \circ \gamma_{\tilde{v}}|_{[0,1]} = \gamma_v$ und $F(\gamma_{\tilde{v}}(1)) = \gamma_v(1) = q$. Da $q \in M$ beliebig war, sehen wir, dass F surjektiv ist.

Nun sei $\tilde{p} \in \tilde{M}$ beliebig. Wir zeigen, dass $\text{inj}_{\tilde{p}}(\tilde{M}, \tilde{g}) \geq \text{inj}_p(M, g)$. Wir nehmen $r > 0$, sodass $B_r(p)$ ein geodätischer Ball für g ist. Da (\tilde{M}, \tilde{g}) vollständig ist, wissen wir nach Satz 4.34, dass $F \circ \exp_{\tilde{p}} = \exp_p \circ d_{\tilde{p}} F : T_{\tilde{p}} \tilde{M} \rightarrow M$. Da F eine lokale Isometrie ist, gilt $d_{\tilde{p}} F(B_r^{T_{\tilde{p}} \tilde{M}}) = B_r^{T_p M}$. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B^{T_{\tilde{p}} \tilde{M}} & \xrightarrow{F \circ \exp_{\tilde{p}}|_{B_r^{T_{\tilde{p}} \tilde{M}}}} & B_r(p) \\ d_{\tilde{p}} F \downarrow & \nearrow \exp_p|_{B_r^{T_p M}} & \\ B_r^{T_p M} & & \end{array}$$

Da $d_{\tilde{p}} F$ und $\exp_p|_{B_r^{T_p M}}$ Diffeomorphismen sind, ist auch $F \circ \exp_{\tilde{p}}$ ein Diffeomorphismus. Wir schließen daraus, dass $\exp_{\tilde{p}}(B_r^{T_{\tilde{p}} \tilde{M}}) \subset \tilde{M}$ offen ist und dass

$$\exp_{\tilde{p}} : B_r^{T_{\tilde{p}} \tilde{M}} \rightarrow \exp_{\tilde{p}}(B_r^{T_{\tilde{p}} \tilde{M}}), \quad F : \exp_{\tilde{p}}(B_r^{T_{\tilde{p}} \tilde{M}}) \rightarrow B_r(p)$$

Diffeomorphismen sind. Daher ist $\exp_{\tilde{p}}(B_r^{T_{\tilde{p}} \tilde{M}}) = B_r(\tilde{p})$ ein geodätischer Ball von Radius r . Da $r < \text{inj}_p(M, g)$ beliebig war, folgt die Ungleichung über die Injektivitätsradii.

Es sei nun $\tilde{p}' \in F^{-1}(p)$ mit $\tilde{p}' \neq \tilde{p}$. Wir zeigen die Ungleichung $d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, \tilde{p}') \geq 2\text{inj}_p(M, g)$. Es sei per Widerspruch angenommen, dass $d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, \tilde{p}') < 2r$, wobei $B_r(p)$ ein abgeschlossener geodätischer Ball ist. Nach der Vollständigkeit von (\tilde{M}, \tilde{g}) existiert eine nicht-konstante Geodätische $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ mit $\gamma(0) = \tilde{p}$, $\gamma(1) = \tilde{p}'$ und $L_{\tilde{g}}(\gamma) = d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, \tilde{p}') < 2r$. Dann ist $\delta := F \circ \gamma$ eine nicht-konstante Geodätische auf M mit $\delta(0) = p = \delta(1)$ und

$$L_g(\delta) = L_{\tilde{g}}(\gamma) < 2r.$$

Das heißt, dass δ nicht in $B_r(p)$ enthalten ist. Ansonsten wäre

$$0 = d_g(p, p) = d_g(\delta(0), \delta(1)) = 1 \cdot |\dot{\delta}(0)| > 0.$$

Dann existiert $t \in [0, 1]$ mit $\delta(t) \in S_r(p)$, sodass wir den Widerspruch

$$L_g(\delta) \geq d_g(\delta(0), \delta(t)) + d_g(\delta(t), \delta(1)) = r + r = 2r$$

bekommen.

Wir können nun den Beweis, dass F eine Überlagerung ist, leicht abschließen. Wir behaupten, dass $B_r(p)$ eine trivialisierende Umgebung für F ist. Wir zeigen zuerst, dass

$$F^{-1}(B_r(p)) = \bigcup_{\tilde{p} \in F^{-1}(p)} B_r(\tilde{p}). \quad (4.29)$$

Wir haben gezeigt, dass $F : B_r(\tilde{p}) \rightarrow B_r(p)$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist die rechte Seite in der linken Seite enthalten. Es sei nun $\tilde{q} \in F^{-1}(B_r(p))$. Dann $F(\tilde{q}) \in B_r(p)$. Daher existiert $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische mit $\gamma_v(0) = q$, $\gamma_v(1) = p$ und $L_g(\gamma_v) < r$. Wir betrachten $\tilde{v} \in T_{\tilde{q}}M$ mit $v = d_{\tilde{q}}F \cdot \tilde{v}$. Dann ist $\gamma_{\tilde{v}}$ eine Geodätische mit $F \circ \gamma_{\tilde{v}} = \gamma_v$ und $L_{\tilde{g}}(\gamma_{\tilde{v}}) = L_g(\gamma_v) < r$. Es folgt, dass $\tilde{p} := \gamma_{\tilde{v}}(1) \in F^{-1}(p)$ und $d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq L_{\tilde{g}}(\gamma_{\tilde{v}}) < r$. Nach Satz 4.43 ist $\tilde{q} \in B_r(\tilde{p})$. Wir haben somit gezeigt, dass die linke Seite von (4.29) in der rechten Seite enthalten ist. Das zeigt die Gleichung (4.29). Es bleibt nur zu zeigen, dass die Mengen auf der rechten Seite paarweise disjunkt sind. Wenn $\tilde{q} \in B_r(\tilde{p}) \cap B_r(\tilde{p}')$ wäre, folgt aus Satz 4.43, dass $d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, \tilde{p}') < 2r$ ist, was $d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, \tilde{p}') \geq 2\text{inj}_p(M, g)$ widerspricht. \square

Bemerkung 4.71. Dieses Resultat wird eine zentrale Rolle im Satz von Cartan-Hadamard über die Topologie von R-Mannigfaltigkeiten nicht-positiver Krümmung spielen. \triangle

Nach dem Satz von Hopf-Rinow wissen wir, dass für jedes Paar von Punkten p, q in einer vollständigen R-Mannigfaltigkeit (M, g) eine minimierende Geodätische γ_v von p nach q existiert. Das heißt, dass

$$L_g(\gamma_v) = \min_{\gamma \in C_{p,q}} L_g(\gamma),$$

wobei $C_{p,q} = C_{p,q}(M)$ die Klasse von Kurven bezeichnet, die von p nach q laufen.

Die Klasse $C_{p,q}$ lässt sich mit Hilfe der Topologie von M aufteilen. Wir definieren nämlich eine Äquivalenzrelation \sim auf $C_{p,q}$ wie folgt: wir schreiben $\gamma_0 \sim \gamma_1$, wenn eine stückweise glatte Homotopie $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ existiert, sodass wenn wir $\Gamma_s := \Gamma(s, \cdot) : [0, 1] \rightarrow M$ für alle $s \in [0, 1]$ setzen, dann gilt

$$\Gamma_s \in C_{p,q}, \quad \forall s \in [0, 1], \quad \Gamma_0 = \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_1.$$

Definition 4.72. Es sei $[C_{p,q}]$ der Quotientenraum von $C_{p,q}$ bezüglich \sim . Eine Äquivalenzklasse $h \in [C_{p,q}]$ heißt Homotopie-Klasse von Kurven von p nach q . \triangle

Wir geben nun eine kurze Beschreibung der Eigenschaften von Homotopie-Klassen von Kurven. Es gilt:

- (a) Wenn $\delta : [0, 1] \rightarrow M$ eine stückweise glatte Kurve mit $\delta(0) = q$ und $\delta(1) = q'$ ist, bekommen wir eine Bijektion

$$C_{p,q} \rightarrow C_{p,q'}, \quad \gamma \mapsto \gamma * \delta,$$

die die Äquivalenzrelation \sim erhält.

(b) Wenn wir $p = q$ nehmen, dann ist $[C_{p,p}]$ mit der Verkettungsoperation die Fundamentalgruppe $\pi_1(M, p)$ von M mit Basispunkt p .

(c) Wenn $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung ist, dann liefert

$$C_{p,q} \rightarrow C_{F(p),F(q)}, \quad \gamma \mapsto F \circ \gamma$$

eine Abbildung, welche die Äquivalenzrelation erhält.

Es folgt, dass wenn M einfach zusammenhängend ist (also ist $\pi_1(M, p)$ die triviale Gruppe), dann gibt es genau eine Homotopie-Klasse von Kurven von p nach q für alle $p, q \in M$. Diese Tatsache lässt uns Homotopie-Klassen von Kurven von p nach q auf M leicht durch Homotopie-Klassen von Kurven auf der universellen Überlagerung $F : \tilde{M} \rightarrow M$ von M beschreiben.

Wir erinnern uns zu diesem Zweck daran, dass eine Überlagerung $F : \tilde{M} \rightarrow M$ universell heißt, wenn $\pi_1(\tilde{M}, \tilde{p})$ die triviale Gruppe ist. Wenn wir $\tilde{p} \in F^{-1}(p)$ festhalten, gibt es eine Bijektion

$$f : [C_{p,q}] \rightarrow F^{-1}(q), \quad f([\gamma]) := \tilde{\gamma}(1),$$

wobei $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ die Hochhebung von $\gamma \in C_{p,q}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ ist. Die Inverse ist gegeben durch $f^{-1}(\tilde{q}) = [F \circ \tilde{\gamma}]$, wobei $\tilde{\gamma}$ ein beliebiges Element von $C_{\tilde{p},\tilde{q}}$ ist. Die Inverse f^{-1} ist wohldefiniert denn \tilde{M} ist einfach zusammenhängend.

Für alle $h \in [C_{p,q}]$ ist

$$h \rightarrow C_{\tilde{p},f(h)}, \quad \gamma \mapsto \tilde{\gamma},$$

eine Bijektion, wobei $\tilde{\gamma}$ die eindeutige Hochhebung von γ in $C_{\tilde{p},f(h)}$ ist. Die Inverse $C_{\tilde{p},f(h)} \rightarrow h$ ist durch $\tilde{\gamma} \mapsto F \circ \gamma$ gegeben.

Nach diesen topologischen Vorbereitungen sind wir bereit die Geometrie ins Spiel zu bringen.

Satz 4.73. *Es sei (M, g) eine vollständige R-Mannigfaltigkeit. Für alle $p, q \in M$ und alle $h \in C_{p,q} / \sim$ existiert eine Geodätische $\gamma_v \in h$, sodass*

$$L_g(\gamma_v) = \min_{\gamma \in h} L_g(\gamma).$$

Beweis. Es sei $F : (\tilde{M}) \rightarrow M$ die universelle Überlagerung von M . Wir setzen $\tilde{g} := F^*g$, sodass $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine R-Überlagerung ist. Nach Satz 4.69 ist (\tilde{M}, \tilde{g}) vollständig. Nach Satz 4.52 existiert eine Geodätische $\gamma_{\tilde{v}} \in C_{\tilde{p},f(h)}$, sodass $L_{\tilde{g}}(\gamma_{\tilde{v}}) = \min_{\tilde{\gamma} \in C_{\tilde{p},f(h)}} L_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma})$. Dann ist $\gamma_v := F \circ \gamma_{\tilde{v}} \in h$ die gesuchte Geodätische. Wir haben nämlich

$$L_g(\gamma_v) = L_{\tilde{g}}(\gamma_{\tilde{v}}) = \min_{\tilde{\gamma} \in C_{\tilde{p},f(h)}} L_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}) = \min_{\gamma \in h} L_g(\gamma),$$

wobei die Identität $L_g(\gamma) = L_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma})$ für eine Kurve und ihre Hochhebung gilt, da F eine lokale Isometrie ist. \square

Neben dem Fall von Homotopie-Klassen von Kurven von p nach q kann man Geodätische mit minimierender Länge in weiteren Klassen von Kurven suchen. Wir erwähnen hier eine andere Möglichkeit aber aus zeitlicher Gründen geben wir nicht alle Details des Beweises.

Definition 4.74. Es sei $C_{\text{Schl}} = \sqcup_{p \in M} C_{p,p}$ die Menge aller Schleifen auf M . Wir definieren die Äquivalenzrelation \sim auf C_{Schl} wie folgt. Es gilt $\gamma_0 \sim \gamma_1$, wenn eine Homotopie $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow M$ existiert, sodass $\Gamma_s \in C_{\text{Schl}}$ und $\Gamma_0 = \gamma_0$, $\Gamma_1 = \gamma_1$. Eine Äquivalenzklasse in C_{Schl} heißt freie Homotopie-Klasse von Schleifen auf M . Die freie Homotopie-Klasse, welche die konstanten Schleifen enthält, heißt die triviale Homotopie Klasse. \triangle

Aufgabe 4.75. Zeigen Sie: Eine Kurve $\gamma \in C_{\text{Schl}}$ gehört zur trivialen Klasse genau dann, wenn $[\gamma]$ das Identitätselement von $\pi_1(M, \gamma(0))$ ist. \triangle

Bemerkung 4.76. Für alle $p \in M$ erhält die Inklusion $C_{p,p} \rightarrow C_{\text{Schl}}$ die Homotopie-Klassen \triangle

Es sei nun (M, g) eine vollständige Mannigfaltigkeit und $h \in C_{\text{Schl}}$ eine freie Homotopie-Klasse von Schleifen. Wir fragen uns, ob $\delta \in h$ existiert, sodass

$$L_g(\delta) = \inf_{\gamma \in h} L_g(\gamma).$$

Wenn h trivial ist, ist die Antwort nicht so interessant: die Kurven δ mit dieser Eigenschaft sind genau die konstanten Schleifen. Es sei dann h nicht trivial. Wir wollen eine Folge $\delta_i \in h$ betrachten, sodass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L_g(\delta_i) = \inf_{\gamma \in h} L_g(\gamma).$$

Wir können annehmen, dass die Kurven $\delta_i = \gamma_{v_i}$ Geodätische sind, wobei $v_i \in TM$ mit $|v_i| = L_g(\delta_i)$ ist. Denn wir können δ_i mit der Geodätischen γ_{v_i} mit minimaler Länge in $h_i \in [C_{p_i, p_i}]$ ersetzen, wobei $p_i := \delta_i(0) = \delta_i(1)$ und $h_i = [\delta_i] \in [C_{p_i, p_i}]$, die von Satz 4.73 gegeben wird. Die Kurven γ_{v_i} gehören dann zu h nach Bemerkung 4.76.

Die Idee ist nun, dass wenn der Limes $v := \lim_{i \rightarrow \infty} v_i$ existiert (hier betrachten wir TM als metrischer Raum), dann ist γ_v eine Kurve in h mit minimaler Länge (hier ist die Tatsache, dass die Länge minimal ist, klar, während die Tatsache, dass γ_v in h liegt, einen Beweis bräuchte, den wir hier nicht geben können). In diesem Fall behaupten wir, dass $v = \dot{\gamma}_v(0) = \dot{\gamma}_v(1)$, $I_v = \mathbb{R}$ und die Kurve $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow M$ ist 1-periodisch $\gamma_v(t+1) = \gamma_v(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Um die Behauptung zu zeigen, betrachtet man die Kurve $\delta \in h$ mit verschobenem Anfangspunkt:

$$\delta(t) = \begin{cases} \gamma_v(t + 1/2) & \text{für } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_v(t - 1/2) & \text{für } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Da $L_g(\delta) = L_g(\gamma_v) = \inf_{\gamma \in h} L_g(\gamma)$ ist δ auch eine Geodätische. Insbesondere ist sie glatt für $t = 1/2$, was $\dot{\gamma}_v(1) = \dot{\gamma}_v(0)$ impliziert.

Also sehen wir, dass wenn der Limes v existiert, bekommen wir eine periodische Geodätische, die die Länge in h minimiert. Allerdings muss der Limes v nicht unbedingt existieren. Man nehme zum Beispiel als (M, g) einen Kegel ohne Scheitel und als h die Klasse von Kurven, die einmal um den Scheitel laufen. Dann konvergieren $p_i := \gamma_{v_i}(0)$ zum Scheitel und daher ist die Folge v_i nicht in TM konvergent. Wenn die Punkte p_i konvergieren, kann man zeigen, dass die Vektoren v_i auch konvergieren. Da wir die Konvergenz nur bis auf Teilfolgen brauchen, sehen wir, dass die Kompaktheit von M genug ist, um die Existenz der minimierenden Schleife in h zu gewährleisten. Wir kommen somit zum folgenden Resultat.

Satz 4.77. *Es sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $h \in C_{\text{Schl}}$ eine nicht triviale Klasse. Dann existiert eine (nicht konstante) Geodätische $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ in der Klasse h , sodass $\dot{\gamma}_v(0) = \dot{\gamma}_v(1)$ und*

$$L_g(\gamma_v) = \inf_{\gamma \in h} L_g(\gamma). \quad \square$$

Bemerkung 4.78. Nach dem obigen Satz könnte man sich fragen, ob auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) eine nicht konstante periodische Geodätische in der trivialen Klasse von Schleifen existiert. Im Allgemeinen stimmt diese Aussage nicht, wie das Beispiel von $(\mathbb{T}^1, g_{\mathbb{T}^1})$ zeigt. Wenn allerdings die triviale Klasse die einzige Klasse von Schleifen auf M ist (das heißt: M ist einfach zusammenhängend) dann zeigt ein schöner Satz von Fet and Lusternik die Existenz einer nicht konstanten periodischen Geodätischen. Als Beispiel dient hier die euklidische Sphäre (S^n, g_{S^n}) für $n \geq 2$ mit ihren Großkreisen. \triangle

5 Orientierung und Integral von Formen

Wir haben eine Riemannsche Metrik benutzt um Kurven (1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten) durch die Länge (das 1-dimensionale Volumen) zu messen. Wir wollen nun sehen, dass man auch höherer dimensional Untermannigfaltigkeiten ein Volumen zuordnen kann. Das kann leichter gemacht werden, wenn die Untermannigfaltigkeit orientierbar ist (für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten verweisen wir auf das Ende des Kapitels 16 in *Introduction to Smooth Manifolds* von Lee). Daher wollen wir erst den Begriff von Orientierung einführen. Wir fangen an, die Definition auf Vektorräumen zu geben. Dann verallgemeinern wir diese auf Vektorbündel $E \rightarrow M$. Wenn $E = TM$ bekommen wir die Definition der Orientierung von Mannigfaltigkeiten.

5.1 Orientierung auf Vektorräumen

Definitionen

Es sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $k \geq 1$. Wir schreiben

$$\mathcal{B}_V := \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k) \text{ Basis von } V\}.$$

Es seien $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ und $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ Elementen von \mathcal{B}_V . Dann existiert eindeutig eine Matrix $A_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} \in GL_k(\mathbb{R})$, welche die Vektoren u_i in der Basis v_j darstellt:

$$u_i = \sum_{j=1}^k (A_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}})^j_i v_j.$$

Auf äquivalenter Weise transformiert die Matrix $A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}$ die Koordinaten eines Vektors $w \in V$ bezüglich \mathbf{u} in die Koordinaten von w bezüglich \mathbf{v} .

Wir sagen, dass \mathbf{u} und \mathbf{v} gleich orientiert sind und schreiben $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, genau dann, wenn

$$\det A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} > 0$$

ist. Wenn $\mathbf{w} \in \mathcal{B}_V$ eine weitere Basis ist, gilt

$$A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{w}} = A_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}} A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}. \quad (5.1)$$

Daher folgt, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

Wenn $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ eine Basis ist, dann ist $\bar{\mathbf{u}} := (-u_1, u_2, \dots, u_k)$ eine Basis und $\det A_{\bar{\mathbf{u}}}^{\mathbf{u}} = -1$. Das impliziert, dass die Quotientenmenge

$$[\mathcal{B}_V] = \{[\mathbf{u}], [\bar{\mathbf{u}}]\},$$

zwei Elemente besitzt. Die Gruppe $S^0 := \{+1, -1\}$ wirkt auf der Menge $[\mathcal{B}_V]$ durch Permutationen. Also wirkt $+1$ als die Identität von $[\mathcal{B}_V]$ und -1 als die Permutation, die die zwei Elemente von $[\mathcal{B}_V]$ umtauscht. Wenn \mathfrak{o} ein Element von $[\mathcal{B}_V]$ ist, dann schreiben wir $-\mathfrak{o} := (-1) \cdot \mathfrak{o}$, um die Notation zu erleichtern.

Definition 5.1. Ein Element \mathfrak{o} von $[\mathcal{B}_V]$ heißt Orientierung auf V . Wenn $\mathbf{u} \in \mathfrak{o}$ (bzw. $u \in -\mathfrak{o}$), sagen wir, dass \mathbf{u} eine positiv (bzw. negativ) orientierte Basis von (V, \mathfrak{o}) ist. \triangle

Man kann untersuchen, wie sich algebraische Operationen auf Vektorräume mit der Orientierung verhalten. Wir betrachten hier nur zwei Fälle, die für uns wichtig sind: Wirkung von linearen Isomorphismen und direkte Summe von Vektorräumen.

Lineare Isomorphismen

Wenn $F : V_1 \rightarrow V_2$ ein linearer Isomorphismus ist, dann erhält die Abbildung

$$F^{-1} : \mathcal{B}_{V_2} \rightarrow \mathcal{B}_{V_1}, \quad F^{-1}(u_1, \dots, u_k) = (F^{-1}u_1, \dots, F^{-1}u_k) \quad (5.2)$$

die Äquivalenzrelation \sim , da $A_{F^{-1}\mathbf{u}}^{F^{-1}\mathbf{v}} = A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}$. Also bekommen wir eine Quotientenabbildung

$$F^{-1} : [\mathcal{B}_{V_2}] \rightarrow [\mathcal{B}_{V_1}]$$

die mit den S^0 -Wirkungen kommutiert.

Definition 5.2. Es seien $(V_1, \mathfrak{o}_{V_1})$ und $(V_2, \mathfrak{o}_{V_2})$ orientierte Vektorräume. Ein Isomorphismus $F : V_1 \rightarrow V_2$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend) wenn $F^{-1}\mathfrak{o}_{V_2} = \mathfrak{o}_{V_1}$ (wenn $F^{-1}\mathfrak{o}_{V_2} = -\mathfrak{o}_{V_1}$). \triangle

Bemerkung 5.3. Der Isomorphismus F erhält die Orientierung genau dann, wenn er positive Basen für \mathfrak{o}_{V_1} auf positive Basen für \mathfrak{o}_{V_2} abbildet. \triangle

Direkte Summen

Es seien V_1, V_2 Vektorräumen der Dimension k_1, k_2 und sei $V = V_1 \oplus V_2$ die direkte Summe. Dann haben wir eine injektive Abbildung

$$\oplus : \mathcal{B}_{V_1} \times \mathcal{B}_{V_2} \rightarrow \mathcal{B}_V, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} := (u_1, \dots, u_{k_1}, v_1, \dots, v_{k_2}),$$

Wenn $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathcal{B}_{V_1}$ und $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathcal{B}_{V_2}$ Basen sind, dann gilt

$$A_{\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}}^{\mathbf{u}' \oplus \mathbf{v}'} = A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{u}'} \oplus A_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}'}, \quad \det(A_{\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}}^{\mathbf{u}' \oplus \mathbf{v}'}) = \det(A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{u}'}) \cdot \det(A_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}'}).$$

Aus dieser Gleichung folgen zwei Tatsachen: die Quotientenabbildung

$$\oplus : [\mathcal{B}_{V_1}] \times [\mathcal{B}_{V_2}] \rightarrow [\mathcal{B}_V]$$

ist wohldefiniert und sie kommutiert mit den S^0 -Wirkungen. Das heißt:

$$(\epsilon_1 \mathfrak{o}_1) \oplus (\epsilon_2 \mathfrak{o}_2) = \epsilon_1 \epsilon_2 (\mathfrak{o}_1 \oplus \mathfrak{o}_2), \quad \forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in S^0, \mathfrak{o}_1 \in [\mathcal{B}_{V_1}], \mathfrak{o}_2 \in [\mathcal{B}_{V_2}], \quad (5.3)$$

wobei $\epsilon_1 \epsilon_2$ das Produkt von ϵ_1 und ϵ_2 in S^0 bezeichnet.

Also induzieren Orientierungen \mathfrak{o}_{V_1} auf V_1 und \mathfrak{o}_{V_2} auf V_2 eindeutig eine Orientierung $\mathfrak{o}_{V_1} \oplus \mathfrak{o}_{V_2}$ auf V . Umgekehrt induzieren aus (5.3) Orientierungen \mathfrak{o}_V auf V und \mathfrak{o}_{V_1} auf V_1 eindeutig eine Orientierung \mathfrak{o}_{V_2} auf V_2 , sodass

$$\mathfrak{o}_V = \mathfrak{o}_{V_1} \oplus \mathfrak{o}_{V_2}.$$

Volumenformen

Wir wollen nun mit Hilfe einer Volumenform eine Orientierung auf V definieren. Wir betrachten dazu den Vektorraum $\Lambda^k V^*$ der schiefsymmetrischen Multilinearformen $\omega : V^k \rightarrow \mathbb{R}$. Dieser Raum hat Dimension 1. Wenn $\mathbf{v} \in \mathcal{B}_V$ eine Basis von V ist, ist ein expliziter Isomorphismus $\Lambda^k V^* \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\omega \mapsto \omega(v_1, \dots, v_k)$ gegeben.

Definition 5.4. Eine Volumenform ω auf V ist ein Element von $\Lambda^k V^* \setminus \{0\}$. \triangle

Bemerkung 5.5. Da $\dim \Lambda^k V^* = 1$ liefert jede Volumenform eine Basis von $\Lambda^k V^*$. \triangle

Wenn $\mathbf{u} \in \mathcal{B}_V$ eine Basis ist, bekommen wir eine Volumenform

$$\omega^{\mathbf{u}} := u^1 \wedge \dots \wedge u^k,$$

wobei u^1, \dots, u^k die Dualbasis von \mathbf{u} ist. Wenn \mathbf{v} eine weitere Basis ist, haben wir die Transformationsregel

$$\omega^{\mathbf{v}} = \det A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} \cdot \omega^{\mathbf{u}}, \quad (5.4)$$

da

$$\omega^{\mathbf{v}}(u_1, \dots, u_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^k v^i(u_{\sigma(i)}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^k (A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}})_{\sigma(i)}^i = \det A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}.$$

und wenn wir $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ einsetzen, finden wir

$$\omega^{\mathbf{u}}(u^1, \dots, u^k) = 1.$$

Definition 5.6. Es sei ω eine Volumenform auf V . Wir setzen

$$\mathfrak{o}_\omega^+ := \{\mathbf{u} \in \mathcal{B}_V \mid \omega(u_1, \dots, u_k) > 0\}, \quad \mathfrak{o}_\omega^- := \{\mathbf{u} \in \mathcal{B}_V \mid \omega(u_1, \dots, u_k) < 0\}.$$

Dann sind \mathfrak{o}_ω^+ und \mathfrak{o}_ω^- die zwei Orientierungen auf V . Wir nennen eine Basis in \mathfrak{o}_ω^+ (bzw. \mathfrak{o}_ω^-) positiv (bzw. negativ) bezüglich ω . \triangle

Bemerkung 5.7. Wenn ω eine Volumenform ist und $a \in \mathbb{R}$ nicht null ist, dann ist

$$\mathfrak{o}_{a\omega}^+ = \begin{cases} \mathfrak{o}_\omega^+ & \text{falls } a > 0, \\ \mathfrak{o}_\omega^- & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Es seien $\omega_1, \dots, \omega_l$ Volumenformen mit $\mathfrak{o}_{\omega_1}^+ = \mathfrak{o}_{\omega_2}^+ = \dots = \mathfrak{o}_{\omega_l}^+$. Wenn a_1, \dots, a_l positive Zahlen sind, dann ist $\omega := \sum_{i=1}^l a_i \omega_i$ eine Volumenform und $\mathfrak{o}_\omega^+ = \mathfrak{o}_{\omega_1}^+ = \dots = \mathfrak{o}_{\omega_l}^+$. \triangle

Bemerkung 5.8. Oben haben wir eine Orientierung auf $V \neq \{0\}$ gegeben. Für den Satz von Stokes ist aber wichtig auch eine Orientierung auf $\{0\}$ zu definieren. In diesem Fall ist eine Orientierung $\mathfrak{o}_{\{0\}}$ einfach ein Element von $S^0 = \{+1, -1\}$. Mit dieser Wahl definiert man, $\mathfrak{o}_V \oplus \mathfrak{o}_{\{0\}} := \mathfrak{o}_{\{0\}} \cdot \mathfrak{o}_V$, wobei auf der rechten Seite die S^0 -Wirkung auf $[\mathcal{B}_V]$ zu verstehen ist. Für eine bessere Begründung warum diese Definition natürlich ist, verweisen wir auf die Wikipedia Seite *Orientation (vector space): Zero-dimensional case*. \triangle

5.2 Orientierung auf Vektorbündeln

Mit Hilfe des vorherigen Abschnitts wollen wir eine Orientierung auf den Fasern eines Vektorbündels $E \rightarrow M$ definieren, sodass sie glatt mit dem Punkt variiert. Lokal können wir immer eine Orientierung durch Rahmen definieren. Um die Orientierung global zu haben, müssen wir eine Familie von lokalen Rahmen finden, die paarweise gleich orientiert sind. Ob das gelingt wird vom Vektorbündel abhängen.

Definitionen

Definition 5.9. Es sei $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_k)$ ein Rahmen von E auf U und $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_k)$ ein Rahmen von E auf U' . Wir sagen, dass \mathbf{e} und \mathbf{e}' gleich orientiert sind, falls

$$\mathbf{e}(p) \sim \mathbf{e}'(p) \in \mathcal{B}_{E_p}, \quad \forall p \in U \cap U'. \quad \triangle$$

Bemerkung 5.10. Wir schreiben $A_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'} : U \cap U' \rightarrow GL_k(\mathbb{R})$ für das glatte Matrixfeld, sodass $A_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}(p) = A_{\mathbf{e}(p)}^{\mathbf{e}'(p)}$ für alle $p \in U \cap U'$. Anders gesagt ist $A_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$ die Übergangsfunktion zwischen den Trivialisierungen χ und χ' , die zu \mathbf{e} und \mathbf{e}' assoziiert sind:

$$\chi' \circ \chi^{-1}(p, v) = (p, A_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}(p) \cdot v), \quad \forall (p, v) \in (U \cap U') \times \mathbb{R}^k.$$

Dann sind \mathbf{e} und \mathbf{e}' genau dann gleich orientiert, wenn $A_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$ überall positive Determinante besitzt. \triangle

Definition 5.11. Es sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von offenen Teilmengen von M und $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ eine Familie von Rahmen, sodass $\mathbf{e}^{(i)}$ auf U_i definiert ist. Wir sagen, dass

- (a) $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ global ist, falls die Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M bildet;
- (b) $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ orientiert ist, falls für alle $i, i' \in I$ die Rahmen $\mathbf{e}^{(i)}$ und $\mathbf{e}^{(i')}$ gleich orientiert sind.

Zwei globale, orientierte Familien von Rahmen $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ und $\{\mathbf{f}^{(j)}\}_{j \in J}$ heißen äquivalent (in Zeichen $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I} \sim \{\mathbf{f}^{(j)}\}_{j \in J}$) wenn für alle $i \in I, j \in J$ die Rahmen $\mathbf{e}^{(i)}$ und $\mathbf{f}^{(j)}$ gleich orientiert sind. \triangle

Definition 5.12. Ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ heißt orientierbar, wenn es eine globale, orientierte Familie von Rahmen $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ zulässt. In diesem Fall ist eine Orientierung auf E eine Äquivalenzklasse $\mathfrak{o}_E = [\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}]$ von globalen, orientierten Familien von Rahmen.

Für alle $p \in M$ schreiben wir \mathfrak{o}_{E_p} für die Orientierung auf E_p , die von $\mathbf{e}^{(i)}(p)$ für ein beliebiges $i \in I$ mit $p \in U_i$ induziert wird. Wir sagen, dass eine Basis $\mathbf{v} \in \mathcal{B}_{E_p}$ positiv orientiert bezüglich \mathfrak{o}_E ist, wenn $\mathbf{v} \in \mathfrak{o}_{E_p}$. \triangle

Bemerkung 5.13. Wenn $E \rightarrow M$ orientierbar ist und $\mathfrak{o}_E = [\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}]$ eine Orientierung ist, existieren genau zwei Orientierungen auf E : \mathfrak{o}_E und $-\mathfrak{o}_E := [\{\bar{\mathbf{e}}^{(i)}\}_{i \in I}]$. Das folgt aus der Tatsache, dass M zusammenhängend ist (warum?). \triangle

Beispiel 5.14. Ist $E \rightarrow M$ trivial, dann ist es auch orientierbar, da ein globaler Rahmen automatisch eine globale, orientierte Familie von Rahmen liefert. Also ist das Tangentialbündel einer Lie-Gruppe orientierbar. Insbesondere ist das Tangentialbündel des n -Torus orientierbar. \triangle

Beispiel 5.15. Es sei angenommen, dass Rahmen \mathbf{e} und \mathbf{e}' existieren, sodass $M = U \cup U'$ und $U \cap U'$ zusammenhängend ist. Dann ist $\det A_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'} : U \cap U' \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, die den Wert null nicht annehmen darf. Da $U \cap U'$ zusammenhängend ist, ist $\det A_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$ entweder immer positiv oder immer negativ. Dann ist $E \rightarrow M$ orientierbar denn eine zwischen $\{\mathbf{e}, \mathbf{e}'\}$ und $\{\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}'\}$ eine globale, orientierte Familie von Rahmen ist. Insbesondere ist das Tangentialbündel einer n -Sphäre mit $n \geq 2$ orientierbar. \triangle

Beispiel 5.16. Es sei angenommen, dass Rahmen \mathbf{e} und \mathbf{e}' existieren, sodass $M = U \cup U'$ und $U \cap U' = U_1 \sqcup U_2$, sodass $\mathbf{e}|_{U_1} \sim \mathbf{e}'|_{U_1}$ und $\mathbf{e}|_{U_2} \not\sim \mathbf{e}'|_{U_2}$. Dann ist $E \rightarrow M$ nicht orientierbar. Ein wesentliches Beispiel dieser Situation ist das Möbiusbündel, das deswegen nicht orientierbar ist. \triangle

Lineare Isomorphismen

Es sei nun $F : E_1 \rightarrow E_2$ ein Bündelhomomorphismus, der eine Abbildung $\bar{F} : M_1 \rightarrow M_2$ hochhebt. Es sei angenommen, dass $F_p : (E_1)_p \rightarrow (E_2)_{\bar{F}(p)}$ ein Isomorphismus für alle

$p \in M_1$ ist. Wenn \mathbf{e} ein Rahmen auf $U \subset M_2$ für E_2 ist, dann ist ${}^F\mathbf{e}$ ein Rahmen auf $\bar{F}^{-1}(U)$ für E_1 , wobei

$${}^F e_i(p) := (F_p)^{-1}(e_i(\bar{F}(p))), \quad \forall p \in \bar{F}^{-1}(U)$$

Wenn nun $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ eine globale orientierte Familie von Rahmen von E_2 ist, dann ist $\{{}^F\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ eine globale, orientierte Familie von Rahmen von E_1 , weil

$$A_{F\mathbf{e}^{(i)}} = A_{\mathbf{e}^{(i)}} \circ \bar{F}.$$

Wir setzen ${}^F[\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}] = [\{{}^F\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}]$ und man kann sehen, dass das eine gute Definition ist.

Definition 5.17. Es seien $(E_1, \mathfrak{o}_{E_1})$ und $(E_2, \mathfrak{o}_{E_2})$ orientierte Vektorbündel. Ein faserweise linearer Isomorphismus $F : E_1 \rightarrow E_2$ heißt orientierungserhaltend (bzw. umkehrend), falls ${}^F(\mathfrak{o}_{E_2}) = \mathfrak{o}_{E_1}$ (bzw. ${}^F(\mathfrak{o}_{E_2}) = -\mathfrak{o}_{E_1}$). \triangle

Bemerkung 5.18. Der faserweise Isomorphismus F erhält die Orientierung genau dann, wenn er positive Basen für \mathfrak{o}_{E_1} auf positive Basen für \mathfrak{o}_{E_2} abbildet. \triangle

Direkte Summen

Es seien $(E_1, \mathfrak{o}_{E_1})$ und $(E_2, \mathfrak{o}_{E_2})$ orientierte Vektorbündel. Wir können globale, orientierte Familien von Rahmen $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ und $\{\mathbf{f}^{(i)}\}_{i \in I}$ über derselben offene Überdeckung von M in den Äquivalenzklassen \mathfrak{o}_{E_1} und \mathfrak{o}_{E_2} finden. Dann liefert $\{\mathbf{e}^{(i)} \oplus \mathbf{f}^{(i)}\}_{i \in I}$ eine globale, orientierte Familie von Rahmen für $E = E_1 \oplus E_2$. Außerdem ist die Äquivalenzklasse dieser Familie nicht von Repräsentanten $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ und $\{\mathbf{f}^{(i)}\}_{i \in I}$ abhängig und wir setzen

$$\mathfrak{o}_{E_1} \oplus \mathfrak{o}_{E_2} := [\{\mathbf{e}^{(i)} \oplus \mathbf{f}^{(i)}\}_{i \in I}].$$

Umgekehrt wollen wir aus einer Orientierung \mathfrak{o}_E auf $E = E_1 \oplus E_2$ und einer Orientierung \mathfrak{o}_{E_1} auf E_1 eine Orientierung auf E_2 bekommen. Wir nehmen dafür

- eine globale, orientierte Familie von Rahmen $\{\mathbf{g}^{(i)}\}_{i \in I}$, die \mathfrak{o}_E repräsentiert,
- eine globale, orientierte Familie von Rahmen $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$, die \mathfrak{o}_{E_1} repräsentiert,
- eine globale Familie von Rahmen $\{\mathbf{f}^{(i)}\}_{i \in I}$ für E_2 ,

sodass die drei Familien über derselben offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von *zusammenhängenden* Mengen definiert sind. Bis auf Ersetzen von $\mathbf{f}^{(i)}$ durch $\bar{\mathbf{f}}^{(i)}$ können wir annehmen, dass $\mathbf{g}^{(i)}$ und $\mathbf{e}^{(i)} \oplus \mathbf{f}^{(i)}$ gleich orientiert sind denn die Mengen U_i sind zusammenhängend. Dann ist die globale Familie $\{\mathbf{f}^{(i)}\}_{i \in I}$ auch orientiert (warum?) und $\mathfrak{o}_{E_1} \oplus \mathfrak{o}_{E_2} = \mathfrak{o}_E$, wobei $\mathfrak{o}_{E_2} := [\{\mathbf{f}^{(i)}\}_{i \in I}]$. Es ist auch leicht zu sehen, dass \mathfrak{o}_{E_2} nicht von den Repräsentanten $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ und $\{\mathbf{g}^{(i)}\}_{i \in I}$ abhängt.

Volumenformen

Wie für den Fall von Vektorräume kann man Orientierungen auf Vektorbündeln durch Volumenformen definieren.

Definition 5.19. Eine Volumenform auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ vom Rang k ist ein glatter Schnitt von $\Gamma(\Lambda^k E^*)$, sodass $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$. \triangle

Satz 5.20. Es sei \mathfrak{o}_E eine Orientierung auf $E \rightarrow M$. Dann existiert eine Volumenform ω auf E , eindeutig bis Multiplikation durch eine positive Funktion, sodass

$$\mathfrak{o}_{E_p} = \mathfrak{o}_{\omega_p}^+, \quad \forall p \in M. \quad (5.5)$$

Umgekehrt sei ω eine Volumenform auf E , dann existiert eine eindeutige Orientierung \mathfrak{o}_E auf E , sodass (5.5) stimmt.

Beweis. Es sei $\mathfrak{o}_E = [\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}]$ und betrachten wir die Volumenform

$$\omega^{(i)} := e_{(i)}^1 \wedge \dots \wedge e_{(i)}^k \quad \text{auf } U_i.$$

Für alle $p \in U_i$ gilt $\omega_p^{(i)}(e_1^{(i)}(p), \dots, e_k^{(i)}(p)) = 1$. Daher ist

$$\mathfrak{o}_{\omega_p^{(i)}}^+ = \mathfrak{o}_{E_p}.$$

Wir nehmen nun eine Zerlegung der Eins $\{\rho_i\}_{i \in I}$ bezüglich $\{U_i\}_{i \in I}$ und setzen

$$\omega := \sum_{i \in I} \rho_i \omega^{(i)}.$$

Es sei $p \in M$. Dann existiert $I_p \subset I$ endlich, sodass $\rho_i(p) > 0$ genau dann, wenn $i \in I_p$. Dann gilt

$$\omega_p = \sum_{i \in I_p} \rho_i(p) \omega_p^{(i)}$$

und nach dem zweiten Teil von Bemerkung 5.7 ist $\omega_p \neq 0$ und $\mathfrak{o}_{\omega_p}^+ = \mathfrak{o}_{E_p}$. Die Eindeutigkeit von ω bis auf Multiplikation durch eine positive Funktion folgt aus dem ersten Teil von Bemerkung 5.7.

Es sei umgekehrt eine Volumenform ω gegeben. Wir nehmen eine globale Familie von Rahmen $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$, sodass die Mengen U_i zusammenhängend sind. Wir betrachten die glatte Funktion $\omega(e_1^{(i)}, \dots, e_k^{(i)}) : U_i \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Funktion ist entweder immer negativ oder immer positiv denn U_i ist zusammenhängend. Bis auf Ersetzung von $\mathbf{e}^{(i)}$ durch $\bar{\mathbf{e}}^{(i)}$ können wir annehmen, dass die Funktion positiv ist. Das heißt: $\mathbf{e}^{(i)}(p) \in \mathfrak{o}_{\omega_p}^+$ für alle $p \in U_i$. Dann ist die Familie $\{\mathbf{e}^{(i)}\}_{i \in I}$ auch orientiert. Denn für $p \in U_i \cap U_j$ gilt $\mathbf{e}^{(i)}(p), \mathbf{e}^{(j)}(p) \in \mathfrak{o}_{\omega_p}^+$. \square

Bemerkung 5.21. Es sei $F : E_1 \rightarrow E_2$ ein Bündelhomomorphismus, der ein faserweise Isomorphismus ist und eine Abbildung $\bar{F} : M_1 \rightarrow M_2$ hochhebt. Es sei ω_2 eine Volumenform auf E_2 , die eine Orientierung \mathfrak{o}_{E_2} liefert. Dann ist ${}^F\omega_2$ definiert als $({}^F\omega)_p = (\omega_2)_{\bar{F}(p)} \circ F$ eine Volumenform auf E_1 , welche die Orientierung ${}^F\mathfrak{o}_{E_2}$ liefert.

Es sei zusätzlich eine Volumenform ω_1 auf E_1 gegeben, die eine Orientierung \mathfrak{o}_{E_1} liefert. Dann ${}^F\mathfrak{o}_{E_2} = \mathfrak{o}_{E_1}$ genau dann, wenn ${}^F\omega_2 = f\omega_1$ für eine positive Funktion $f : M \rightarrow (0, \infty)$ gilt. \triangle

Bemerkung 5.22. Es seien E_1, E_2 zwei Vektorbündel auf M . Wir schreiben $E = E_1 \oplus E_2$, sodass wir kanonische Projektionen $\pi_1 : E \rightarrow E_1$ und $\pi_2 : E \rightarrow E_2$ haben. Wenn ω_1, ω_2 Volumenformen auf E_1, E_2 sind, die Orientierungen $\mathfrak{o}_{E_1}, \mathfrak{o}_{E_2}$ induzieren, dann ist

$$(\pi_1\omega_1) \wedge (\pi_2\omega_2)$$

eine Volumenform auf E , welche die Orientierung $\mathfrak{o}_{E_1} \oplus \mathfrak{o}_{E_2}$ induziert.

Es sei umgekehrt ω eine Volumenform auf E , welche eine Orientierung \mathfrak{o}_E induziert und es sei E_1 trivial mit einem globalen Rahmen \mathbf{e} , der eine Orientierung \mathfrak{o}_{E_1} induziert. Dann ist ω_2 definiert durch

$$\pi_2\omega_2 = \iota_{\mathbf{e}}\omega := \omega(e_1, \dots, e_{k_1}, \cdot)$$

eine Volumenform auf E_2 , welche eine Orientierung \mathfrak{o}_{E_2} liefert, sodass $\mathfrak{o}_E = \mathfrak{o}_{E_1} \oplus \mathfrak{o}_{E_2}$. \triangle

Nach den obigen Bemerkungen sollte klar sein, dass die Beschreibung von Orientierungen durch Volumenformen einfacher ist, da man nicht mit Familien von Objekten und mit Quotienten arbeiten muss sondern nur mit einem nirgends verschwindendem Schnitt des Bündels $\Lambda^k E^*$. Die Volumenform ω , die eine Orientierung induziert, ist aber nicht eindeutig, da auch $f\omega$ für $f : M \rightarrow (0, \infty)$ positiv die gleiche Orientierung induziert. Im nächsten Abschnitt werden wir aber sehen, dass wenn das Vektorbündel E mit einer nicht ausgearteten, symmetrischen Bilinearform g versehen ist, dann können wir eindeutig eine Volumenform finden, welche die gegebene Orientierung liefert und verträglich mit g in einem gewissen Sinn ist.

5.3 Die Volumenform eines orientierten pseudoorthogonalen Vektorbündels

In \mathbb{R}^2 ist der euklidische Flächeninhalt (mit Vorzeichen) eines Parallelogramms

$$\text{Par}(\mathbf{v}) := \{t_1v_1 + t_2v_2 \mid (t_1, t_2) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$$

mit Seiten zwei linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ durch

$$\text{vol}_{g_{\mathbb{R}^2}}(\text{Par}(\mathbf{v})) = |v_1| \cdot |v_2| \sin \theta$$

gegeben, wobei $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ der von v_1 und v_2 eingeschlossene Winkel gegen den Uhrzeigersinn ist. Wenn $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ die Standardbasis von \mathbb{R}^2 ist, dann ist es leicht zu sehen, dass

$$\text{vol}_{g_{\mathbb{R}^2}}(\text{Par}(\mathbf{v})) = \det A_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}} = \omega^{\mathbf{e}} =: \omega^{\mathbf{e}}(\mathbf{v})$$

gilt, wobei die zweite Gleichung nach der Definition von $\omega^{\mathbf{e}}$ folgt. Also liefert die Volumenform $\omega^{\mathbf{e}}$ das euklidische Volumen (mit Vorzeichen) von Parallelogrammen.

Mit Berücksichtigung dieses klassischen Falles betrachten wir nun einen k -dimensionalen reellen Vektorraum V mit einer Orientierung \mathfrak{o} und einer nicht ausgearteten, symmetrischen Bilinearform $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn $\mathbf{v} \in \mathcal{B}_V$, dann setzen wir

$$\text{vol}_g(\text{Par}(\mathbf{v})) := \omega^{\mathbf{e}}(\mathbf{v}),$$

wobei \mathbf{e} eine positive (bezüglich \mathfrak{o}), orthonormale (bezüglich g) Basis von V ist. Wir wollen nun sehen, dass die Definition nicht von der Wahl der positiven, orthonormalen Basis abhängt und wollen wir auch eine Formel bekommen, wobei wir $\omega^{\mathbf{u}}$ für eine beliebige positive Basis \mathbf{u} von V benutzen. Zu diesem Zweck erinnern wir uns an die Formel (5.4):

$$\omega^{\mathbf{e}} = \det A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{e}} \cdot \omega^{\mathbf{u}}$$

und wir wollen $\det A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{e}}$ als Funktion von g berechnen. Wenn G die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis \mathbf{u} ist, dann gilt nach Definition einer orthonormalen Basis

$$G = (A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{e}})^T \cdot \delta^{(\sigma_+, \sigma_-)} \cdot A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{e}},$$

denn $A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{e}}$ ist die Matrix, die Koordinaten bezüglich \mathbf{u} in Koordinaten bezüglich \mathbf{e} transformiert.

Wir nehmen die Determinante dieser Gleichung und bekommen

$$\det A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{e}} = \sqrt{|\det G|}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\det A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{e}} > 0$ (da $\mathbf{e}, \mathbf{u} \in \mathfrak{o}$), und dass $|\det \delta^{(\sigma_+, \sigma_-)}| = 1$. Wir finden daher die Formel

$$\text{vol}_g(\text{Par}(\mathbf{v})) = \sqrt{|\det G|} \cdot \omega^{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$$

und schließen, dass die rechte Seite nicht von $\mathbf{u} \in \mathfrak{o}_V$ abhängt. Wir definieren die Volumenform

$$\text{vol}_g := \sqrt{|\det G|} \cdot \omega^{\mathbf{u}}$$

Insbesondere, wenn \mathbf{u} auch orthonormal ist, dann $|\det G| = 1$ und $\omega^{\mathbf{u}} = \text{vol}_g$. Wir haben somit das folgende Resultat bewiesen.

Satz 5.23. *Es sei (V, \mathfrak{o}, g) ein orientierter Vektorraum der Dimension k mit einer nicht ausgearteten, symmetrischen Bilinearform g . Dann existiert eine eindeutige Volumenform $\text{vol}_g \in \Lambda^k V^*$, sodass*

$$\text{vol}_g(\mathbf{v}) = 1,$$

für alle positiven, orthonormalen Basen \mathbf{v} . Wenn \mathbf{u} eine positive Basis und G die Matrixdarstellung von g in dieser Basis ist, dann gilt die Formel

$$\text{vol}_g = \sqrt{|\det G|} \cdot \omega^{\mathbf{u}}. \quad \square$$

Wir können nun diese Überlegungen auf den Fall von Vektorbündeln anwenden.

Satz 5.24. *Es sei (E, \mathfrak{o}, g) ein orientiertes pseudoorthogonales Vektorbündel. Dann existiert eindeutig eine Volumenform vol_g auf E , sodass für alle $p \in M$ und alle positive, orientierte Basen $\mathbf{v} \in \mathfrak{o}_p$ die Formel*

$$(\text{vol}_g)_p(\mathbf{v}) = 1 \quad (5.6)$$

gilt. Wenn \mathbf{e} ein positiver orientierter Rahmen auf einer offenen Menge $U \subset M$ ist, dann

$$\text{vol}_g = \sqrt{|\det G|} \cdot e^1 \wedge \dots \wedge e^k \quad \text{auf } U, \quad (5.7)$$

wobei G die Matrixdarstellung von g bezüglich \mathbf{e} ist.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Formel (5.6). Für die Existenz nehmen wir eine globale, orientierte Familie $\{\mathbf{e}^{(i)}\}$ von orthonormalen Rahmen, welche die Orientierung \mathfrak{o} liefern (warum kann man eine solche Familie finden?). Dann liefert $\text{vol}_g^i := e_{(i)}^1 \wedge \dots \wedge e_{(i)}^k$ eine Volumenform auf U_i die (5.6) erfüllt. Nach der Eindeutigkeit gilt $\text{vol}_g^i = \text{vol}_g^j$ auf $U_i \cap U_j$. Wenn $p \in M$ ein beliebiger Punkt ist, dann liefert

$$(\text{vol}_g)_p := \text{vol}_g^i$$

die gewünschte Volumenform, wobei $i \in I$ ein beliebiges Index mit $p \in U_i$ ist. Die Formel (5.7) folgt nun unmittelbar aus Satz 5.23. \square

Bemerkung 5.25. Wenn g faserweise bilinear und symmetrisch, aber nicht für alle $p \in M$ ausgeartet ist, dann liefert (5.7) einen stetigen, globalen Schnitt von $\Gamma(\Lambda^k E^*)$, der an den Punkten, in denen g ausgeartet ist, verschwindet und dort möglicherweise nicht glatt ist (in (5.7) treten Wurzel und Betrag von reellen Zahlen auf). \triangle

Wenn wir Satz 5.24 mit Satz 5.22 kombinieren, finden wir das folgende Resultat.

Folgerung 5.26. *Es sei $(E, g) = (E_1, g_1) \oplus (E_2, g_2)$ die direkte Summe von zwei pseudoorthogonalen Vektorbündeln, wobei die zwei Summanden senkrecht bezüglich g stehen. Wenn \mathfrak{o}_1 und \mathfrak{o}_2 Orientierungen auf E_1, E_2 sind, dann ist*

$$\text{vol}_g = \pi_1 \text{vol}_{g_1} \wedge \pi_2 \text{vol}_{g_2},$$

die Volumenform für (E, \mathfrak{o}_E, g) , wobei $\pi_1 : E \rightarrow E_1$ und $\pi_2 : E \rightarrow E_2$ die Projektionen darstellen. Es sei umgekehrt vol_g die Volumenform für (E, \mathfrak{o}_E, g) und es sei zusätzlich angenommen, dass E_1 einen globalen, orientierten Rahmen \mathbf{e} besitzt. Dann

$$\pi_2 \text{vol}_{g_2} = \frac{1}{\sqrt{|\det G_1|}} \iota_{\mathbf{e}} \text{vol}_g, \quad (5.8)$$

wobei G_1 die Matrixdarstellung von g_1 bezüglich \mathbf{e} ist.

Beweis. Wir zeigen nun (5.8). Es sei dafür $p \in M$ beliebig und \mathbf{v} eine positive, orthonormale Basis für $(E_2)_p$, sodass

$$\text{vol}_{g_2}(\mathbf{f}) = 1.$$

Es sei G_p die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis $\mathbf{e}(p) \oplus \mathbf{v}$. Dann gilt $|\det G_p| = |\det G_1(p)|$ und

$$\frac{1}{\sqrt{|\det G_1(p)|}} \iota_{\mathbf{e}} \text{vol}_g(\mathbf{f}) = \frac{1}{\sqrt{|\det G_1(p)|}} \text{vol}_g(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \frac{1}{\sqrt{|\det G_1(p)|}} \sqrt{|\det G_p|} = 1. \quad \square$$

5.4 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

Definition 5.27. Eine Mannigfaltigkeit M heißt orientierbar, falls das Tangentialbündel $TM \rightarrow M$ orientierbar ist. Eine Orientierung \mathfrak{o}_M auf M ist dann einfach eine Orientierung von $TM \rightarrow M$. Es sei $F : (N, \mathfrak{o}_N) \rightarrow (M, \mathfrak{o}_M)$ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir schreiben $F^* \mathfrak{o}_M := \text{d}^F \mathfrak{o}_M$. Die Abbildung F heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), falls $F^* \mathfrak{o}_M = \mathfrak{o}_N$ (bzw. $F^* \mathfrak{o}_M = -\mathfrak{o}_N$). \triangle

Bemerkung 5.28. Es seien ω_M, ω_N Volumenform auf M und N mit induzierten Orientierungen \mathfrak{o}_M und \mathfrak{o}_N . Nach Bemerkung 5.21 erhält ein lokaler Diffeomorphismus $F : N \rightarrow M$ die Orientierung genau dann, wenn $F^* \omega_M = f \omega_N$, wobei $f : N \rightarrow (0, \infty)$ eine positive Funktion ist. \triangle

Beispiel 5.29. Es sei $\tau : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die antipodale Abbildung $\tau(p) = -p$. Dann ist

$$\tau^* \mathfrak{o}_{\mathbb{R}^{n+1}} = (-1)^{n+1} \mathfrak{o}_{\mathbb{R}^{n+1}}. \quad (5.9)$$

Es sei $\tau_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$ die Einschränkung von τ auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und es sei $\nu \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n})$ gegeben durch $\nu(p) = p$. Es folgt aus $d\tau(\nu) = \nu$ und Formel (5.9) (warum?), dass

$$\tau_{S^n}^* \mathfrak{o}_{S^n} = (-1)^{n+1} \mathfrak{o}_{S^n}.$$

Es folgt, dass n ungerade sein muss, falls $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ orientierbar ist (warum?). Umgekehrt kann man zeigen, dass $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ für n ungerade orientierbar ist. \triangle

Es sei $\{(U_i, x_{(i)})\}_{i \in I}$ ein Atlas für M . Dann liefern die Koordinatenvektorfelder $\{\partial_{\mathbf{x}_{(i)}} := (\partial_{x_{(i)}^1}, \dots, \partial_{x_{(i)}^n})\}_{i \in I}$ eine globale Familie von Rahmen für $TM \rightarrow M$. Es gilt

$$A_{\partial_{\mathbf{x}_{(i)}}}^{\partial_{\mathbf{x}_{(j)}}} = d(x_{(j)} \circ x_{(i)}^{-1}),$$

wobei wir das Differential $d(x_{(j)} \circ x_{(i)}^{-1})$ mit seiner Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen identifizieren. Die globale Familie $\{\partial_{\mathbf{x}_{(i)}}\}_{i \in I}$ ist orientiert genau dann, wenn $\det d(x_{(j)} \circ x_{(i)}^{-1}) > 0$ für alle $i, j \in I$. Das motiviert die folgende Definition.

Definition 5.30. Ein Atlas $\{(U_i, x_{(i)})\}_{i \in I}$ auf M heißt orientiert, falls

$$\det (d(x_{(j)} \circ x_{(i)}^{-1})) > 0, \quad \forall i, j \in I. \quad \triangle$$

Satz 5.31. *Eine Mannigfaltigkeit ist orientierbar genau dann, wenn sie einen orientierten Atlas zulässt. In diesem Fall gibt es einen orientierten Atlas für jede der beiden Orientierungen auf M .*

Beweis. Nach der obigen Diskussion ist M orientierbar, wenn ein orientierter Atlas existiert. Wir nehmen nun an, dass M eine Orientierung \mathfrak{o}_M besitzt und betrachten einen beliebigen Atlas $\{(U_i, x_{(i)})\}_{i \in I}$, wobei U_i zusammenhängend für alle $i \in I$ ist. Bis auf Ersetzung von $x_{(i)}$ durch $\bar{x}_{(i)} := (-x_{(i)}^1, x_{(i)}^2, \dots, x_{(i)}^n)$ können wir annehmen, dass $\partial_{\mathbf{x}_{(i)}}$ positiv bezüglich \mathfrak{o}_M ist. Hier benutzen wir, dass

$$\partial_{\bar{\mathbf{x}}_{(i)}} = \overline{\partial_{\mathbf{x}_{(i)}}}.$$

Das heißt, dass der so entstandene Atlas $\{(U_i, x_{(i)})\}_{i \in I}$ orientiert ist und die Orientierung \mathfrak{o}_M liefert. \square

Aufgabe 5.32. Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass das Tangentialbündel $T(TM) \rightarrow TM$ des Tangentialbündels von M immer orientierbar ist. Also ist TM für alle M eine orientierbare Mannigfaltigkeit. \triangle

Definition 5.33. Die Volumenform einer orientierten PR-Mannigfaltigkeit (M, \mathfrak{o}_M, g) ist definiert als die Volumenform $\text{vol}_g \in \Gamma(\Lambda^n T^*M)$ des Tangentialbündels (TM, \mathfrak{o}_M, g) , wie gegeben in Satz 5.24. \triangle

Die Diskussion über die Orientierung einer direkten Summe kann benutzt werden, um Orientierungen durch PR-Immersionen zurückzuziehen. Es sei dann (M, \mathfrak{o}_M, g^M) eine orientierte PR-Mannigfaltigkeit und $F : (N, g^N) \rightarrow (M, g^M)$ eine isometrische Immersion. Dann haben wir die orthogonale Zerlegung

$$({}^F TM, {}^F g^M) = (\mathcal{N}_F, g^M|_{\mathcal{N}_F}) \oplus (TM, g^N).$$

Es sei nun angenommen, dass \mathcal{N}_F eine Orientierung $\mathfrak{o}_{\mathcal{N}_F}$ besitzt. Dann besitzt auch N eine Orientierung \mathfrak{o}_N , sodass

$${}^F \mathfrak{o}_M = \mathfrak{o}_{\mathcal{N}_F} \oplus \mathfrak{o}_N.$$

Wenn \mathcal{N}_F einen globalen, orthonormalen Rahmen \mathbf{e} besitzt, dann gilt nach Folgerung 5.26

$$\text{vol}_{g^N} = \frac{1}{\sqrt{|\det G_{\mathcal{N}_F}|}} F^*(\iota_{\mathbf{e}} \text{vol}_{g^M}),$$

wobei $G_{\mathcal{N}_F}$ die Matrixdarstellung von $g_{\mathcal{N}_F}$ bezüglich \mathbf{e} ist.

Als Beispiel für die obige Situation nehmen wir $N = \mathbf{f}^{-1}(c)$, wobei $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Funktion und $c \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert von \mathbf{f} ist. In diesem Fall ist $F : N \rightarrow M$ die Inklusion. Die Gradienten der Koordinaten ($\text{grad} f^i$) spannen dann \mathcal{N}_F auf und wir nehmen an, dass $\mathcal{N}_F \cap TN = 0_{TN}$ gilt, sodass $g^N := F^*g^M$ eine PR-Metrik auf N ist.

Wir bekommen eine Orientierung $\mathfrak{o}_{\mathcal{N}_F}$ auf dem Normalbündel \mathcal{N}_F aus dem globalen Rahmen $\text{grad } \mathbf{f} := (\text{grad} f^1, \dots, \text{grad} f^k)$. Dann gilt

$$\text{vol}_{g^N} = \frac{1}{\sqrt{|\det G_{\mathcal{N}_F}|}} F^*(\iota_{\text{grad } \mathbf{f}} \text{vol}_{g^M}),$$

wobei $G_{\mathcal{N}_F}$ die Matrixdarstellung von $g_{\mathcal{N}_F}$ bezüglich des Rahmens $\text{grad } \mathbf{f}$ ist.

Zum Beispiel gewinnen wir für $k = 1$ die Formel

$$\text{vol}_{g^N} = \frac{1}{\sqrt{|g(\text{grad } f, \text{grad } f)|}} F^*(\iota_{\text{grad } f} \text{vol}_{g^M}). \quad (5.10)$$

Bemerkung 5.34. Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \rightarrow M$ eine PR-immersierte Kurve mit Parameter $t \in I$. Dann $\gamma^*g = g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})dt^2$ und

$$\text{vol}_{\gamma^*g} = \sqrt{|g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})|} dt. \quad (5.11)$$

Wenn g Riemannsch ist, bekommen wir zum Beispiel

$$\text{vol}_{\gamma^*g} = |\dot{\gamma}|_\gamma dt.$$

Wenn γ nur stückweise glatt oder nicht überall eine PR-Immersion ist, dann liefert (5.11) noch eine Art Volumenform (möglicherweise mit Nullstellen und nicht glatt), das nicht von der Parametrisierung von γ abhängt (siehe Bemerkung 5.25). Im Riemannschen Fall kann man die Länge einer Kurve als das Integral von dieser verallgemeinerten Volumenform (siehe Bemerkung 5.40). \triangle

5.5 Integral von n -Formen auf n -dimensionalen orientierten Mannigfaltigkeiten

Wenn wir eine Orientierung \mathfrak{o} auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M haben, können wir das übliche Integral

$$\int_V f(y) dy^1 \dots dy^n \quad (5.12)$$

von glatten Funktionen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, die auf einer offenen Menge des euklidischen Raums definiert sind, auf M übertragen. Hier nehmen wir an, dass der Träger kompakt ist, da diese Voraussetzung die Integrierbarkeit von f automatisch liefert.

Um diese Übertragung zu schaffen, benutzen wir wie üblich die Karten von M . Wir müssen aber vorsichtig sein, dass die Definition nicht von der Wahl der Karte abhängt. Denn in der klassischen Theorie der Integrale haben wir die Transformationsregel

$$\int_{V'} (f \circ \psi)(x) \cdot |\det d_x \psi| dx^1 \dots dx^n = \int_V f(y) dy^1 \dots dy^n, \quad (5.13)$$

wobei $V' \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\psi : V' \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus sind. Nach der Transformationsregel für n -Formen wissen wir aber, dass

$$\psi^*(f dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (f \circ \psi) \cdot \det d\psi \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n),$$

wobei $dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \in \Gamma(\Lambda^n T^*V)$ und $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Gamma(\Lambda^n T^*V')$. Ist $\det d\psi > 0$, dann können wir (5.12) als Integral der n -Form $f dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$ interpretieren und die Formel

(5.13) sagt uns genau, dass die Definition nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt. Im nächsten Satz sehen wir, dass eine eindeutige lineare Abbildung existiert, die (5.12) fortsetzt, das Integral bezüglich der Orientierung \mathfrak{o} von n -Formen auf M mit kompaktem Träger. Wir führen dazu die Notation

$$\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k T^*M), \quad \Omega_{\text{komp}}^k(M) := \{\eta \in \Omega^k(M) \mid T(\eta) \text{ ist kompakt}\},$$

wobei $T(\eta)$ der Träger von η bezeichnet.

Satz 5.35. *Es sei (M, \mathfrak{o}) eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension $n > 0$. Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung ${}^{\circ}\int_M : \Omega_{\text{komp}}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle positiv orientierten Karten $\mathbf{x} : U \rightarrow V$ und alle $\eta \in \Omega_{\text{komp}}^n(M)$ mit $T(\eta) \subset U$ gilt*

$${}^{\circ}\int_M \eta = \int_V f_{\eta}^{\mathbf{y}} \circ \mathbf{y}^{-1} dy^1 \dots dy^n, \quad (5.14)$$

wobei $f_{\eta}^{\mathbf{y}} : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Formel $\eta = f_{\eta}^{\mathbf{y}} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$ definiert wird. Es gelten die folgenden zusätzlichen Eigenschaften

(a) **Orientierungswechsel:** ${}^{-\circ}\int_M = -{}^{\circ}\int_M$;

(b) **Pullback durch Diffeomorphismen:** wenn $F : N \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus ist, dann

$${}^{F^*\mathfrak{o}}\int_N F^*\eta = {}^{\circ}\int_M \eta, \quad \forall \eta \in \Omega_{\text{komp}}^n(M)$$

(c) **Monotonie:** es seien $\eta_1, \eta_2 \in \Omega_{\text{komp}}^n(M)$. Wenn $\eta_1 \leq \eta_2$ gilt (d.h. $\eta_2 - \eta_1$ nicht negativ bezüglich \mathfrak{o} ist), dann

$${}^{\circ}\int_M \eta_1 \leq {}^{\circ}\int_M \eta_2$$

und die Gleichheit genau dann gilt, wenn $\eta_1 = \eta_2$.

Beweis. Es sei $\eta \in \Omega_{\text{komp}}^n(M)$. Wenn eine positiv orientierte Karte $\mathbf{y} : U \rightarrow V$ mit $T(\eta) \subset U$ existiert, dann definieren wir ${}^{\circ}\int_M \eta$ durch (5.14). Wenn $\mathbf{x} : U' \rightarrow V'$ eine zusätzliche Karte mit $T(\eta) \subset U'$ ist, dann gilt

$$\eta = f_{\eta}^{\mathbf{y}} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = f_{\eta}^{\mathbf{y}} \det d_{\mathbf{x}}(\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

sodass $f_{\eta}^{\mathbf{x}} = f_{\eta}^{\mathbf{y}} \det d_{\mathbf{x}}(\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1})$. Wir bekommen daher nach (5.13), dass

$$\begin{aligned} \int_V f_{\eta}^{\mathbf{y}} \circ \mathbf{y}^{-1} dy^1 \dots dy^n &= \int_V f_{\eta}^{\mathbf{y}} \circ \mathbf{y}^{-1} \circ (\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}) |\det d(\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1})| dx^1 \dots dx^n \\ &= \int_{V'} f_{\eta}^{\mathbf{y}} \circ \mathbf{x}^{-1} \det d(\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}) dx^1 \dots dx^n \\ &= \int_{V'} f_{\eta}^{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} dx^1 \dots dx^n \end{aligned}$$

und daher ist das Integral in diesem Fall wohldefiniert. Außerdem ist das Integral linear auf dem Vektorraum aller $\eta \in \Omega_{\text{komp}}^n(M)$ mit $T(\eta) \subset U$.

Wenn η allgemein ist, existieren endlich viele positiv orientierte Karten $\{(U_i, \mathbf{x}_{(i)})\}_{i \in I}$, sodass $T(\eta) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ und wir nehmen eine Zerlegung der Eins $\{\rho_i\}_{i \in I}$ bezüglich $\{U_i\}_{i \in I}$. Dann ist $T(\rho_i \eta)$ eine kompakte Teilmenge von U_i für alle $i \in I$ und wir setzen

$$\int_M \eta := \sum_{i \in I} \int_M \rho_i \eta.$$

Wenn $\{(U'_j, \mathbf{y}_{(j)})\}_{j \in J}$ eine weitere Familie von positiv orientierten Karten mit Zerlegung der Eins $\{\rho'_j\}_{j \in J}$, sodass $T(\eta) \subset \bigcup_{j \in J} U'_j$, dann

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \int_M \rho_i \eta &= \sum_{i \in I} \int_M \sum_{j \in J} \rho'_j \rho_i \eta = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_M \rho'_j \rho_i \eta = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \int_M \rho'_j \rho_i \eta \\ &= \sum_{j \in J} \int_M \sum_{i \in I} \rho'_j \rho_i \eta \\ &= \sum_{j \in J} \int_M \rho'_j \eta. \end{aligned}$$

Also ist das Integral auch in diesem Fall wohldefiniert.

Wir zeigen nun die Eigenschaften (a), (b), (c). Die erste Eigenschaft folgt aus der Tatsache, dass $f_\eta^{\mathbf{y}} = -f_\eta^{\mathbf{x}}$. Die zweite Eigenschaft aus der Tatsache, dass $(F^{-1}(U), \mathbf{x} \circ F)$ eine positiv orientierte Karte für $(N, F^* \mathfrak{o})$ ist, falls (U, \mathbf{x}) eine positiv orientierte Karte für (M, \mathfrak{o}) war, und aus der Tatsache, dass

$$f_{F^* \eta}^{\mathbf{x} \circ F} \circ F^{-1} = f_\eta^{\mathbf{x}}$$

für $\eta \in \Omega_{\text{komp}}^n(M)$. Die dritte Eigenschaft aus der Monotonie des klassischen Integrals und der Tatsache, dass $f_{\eta_1}^{\mathbf{x}} \leq f_{\eta_2}^{\mathbf{x}}$. \square

Bemerkung 5.36. Nach dem obigen Satz braucht man eine Zerlegung der Eins $\{\rho_i\}_{i \in I}$ um Integralen von n -Formen auf Mannigfaltigkeiten zu berechnen. Allerdings sind die Integralen $\rho_i \eta$ normalerweise nicht explizit zu berechnen, da die Funktionen ρ_i komplizierte Ausdrücke enthalten. Ein Ausweg von diesem Problem ist, von M eine „kleine“ Teilmenge N wegzuerwerfen, sodass

$$M \setminus N = \bigsqcup_{i \in I} U_i$$

die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Definitionsbereichen von positiv orientierten Karten $\mathbf{x}_{(i)} : U_i \rightarrow V_i$ sind. Klein hier heißt, zum Beispiel, dass N die endliche Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten von M der Dimension $k < n$. Man findet, dass

$$\int_M \eta = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \eta = \sum_{i \in I} \int_{V_i} f_\eta^{\mathbf{x}_{(i)}} dx^1 \dots dx^n. \quad \triangle$$

Beispiel 5.37. Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter mit Basis $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}^n$, die gleich orientiert wie der Standardbasis von \mathbb{R}^n ist. Wir setzen $\det \Gamma$ für die Determinante der Matrix $\{(\gamma_j^i)\}$, die nicht von der Basis abhängt (warum?). Wir berechnen nun $\text{vol}_{g_{\mathbb{R}^n/\Gamma}}(\mathbb{R}^n/\Gamma) = \det \Gamma$. Wir betrachten dafür die Abbildung

$$(0, 1)^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma, \quad F(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i \gamma_i,$$

die ein Orientierungserhaltender Diffeomorphismus auf das Bild ist denn $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ eine positive Basis von \mathbb{R}^n ist. Außerdem ist $(\mathbb{R}^n/\Gamma) \setminus F((0, 1)^n)$ die Vereinigung von Hyperflächen und daher gilt nach Bemerkung 5.36

$$\text{vol}_{g_{\mathbb{R}^n/\Gamma}}(\mathbb{R}^n/\Gamma) = \int_{F((0,1)^n)} \text{vol}_{g_{\mathbb{R}^n/\Gamma}} = \int_{(0,1)^n} (\det \Gamma) dx^1 \dots dx^n = \det \Gamma. \quad \triangle$$

Beispiel 5.38. Wir betrachten Polarkoordinaten $F : (0, \pi) \times S^{n-1} \rightarrow S^n \setminus \{-e_{n+1}, e_{n+1}\}$ für die Sphäre. Dann gilt $\text{vol}_{g_{S^n}} = (\sin \theta)^{n-1} d\theta \wedge \text{vol}_{g_{S^{n-1}}}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g_{S^n}}(S^n) &= \int_{S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\}} \text{vol}_{g_{S^n}} = \int_{(0,\pi) \times S^{n-1}} (\sin \theta)^{n-1} d\theta \wedge \text{vol}_{g_{S^{n-1}}} \\ &= \text{vol}_{g_{S^{n-1}}}(S^{n-1}) \int_0^\pi (\sin \theta)^{n-1} d\theta, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung Produktkarten für $(0, \pi) \times S^{n-1}$ und den Satz von Fubini benutzt haben. Man kann nun die klassischen Formeln für $\int_0^\pi (\sin \theta)^{n-1} d\theta$ einsetzen, um eine rekursive Formel für $\text{vol}_{g_{S^n}}(S^n)$ herzuleiten (man fängt mit $\text{vol}_{g_{S^0}}(S^0) = 2$ an). \triangle

Bemerkung 5.39. Wenn $\dim M = 0$, dann ist $M = \{p_i\}_{i \in I}$ eine endliche oder abzählbare Menge von Punkten mit der diskreten Topologie. In diesem Fall ist eine Orientierung auf M eine Funktion $\mathfrak{o} : M \rightarrow S^0 = \{-1, +1\}$ und wir definieren das Integral einer Funktion $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger als die Summe

$$\int_M^{\mathfrak{o}} \eta := \sum_{i \in I} \eta(p_i) \mathfrak{o}(p_i). \quad \triangle$$

Wenn nun g eine PR-Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit (M, \mathfrak{o}) ist, dann ist das gesamte Volumen von M die positive Zahl

$$\text{vol}_g(M) := \int_M^{\mathfrak{o}} \text{vol}_g,$$

wobei vol_g die Volumenform bezüglich g und \mathfrak{o} ist. Wir bemerken, dass $\text{vol}_g(M)$ nicht von \mathfrak{o} abhängt, da auch vol_g das Vorzeichen ändert, wenn wir die inverse Orientierung nehmen.

Bemerkung 5.40. Das Volumen einer PR-Immersion $F : N \rightarrow M$ ist dann das Volumen $\text{vol}_{F^*g}(N)$ bezüglich der Pullback-Metrik. Man kann das Volumen für glatte Abbildung $F : N \rightarrow M$, die nicht unbedingt PR-Immersionen sind mit Hilfe von Bemerkung 5.34 definieren. Wenn g eine Riemannsche Metrik ist und $F = \gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve ist, dann ist $\text{vol}_{\gamma^*g}(I) = L_g(\gamma)$ die Länge der Kurve. \triangle

Für Integrale auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ gilt aus Analysis I der Fundamentalsatz der Integralrechnung

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt = f(t_1) - f(t_0). \quad (5.15)$$

Mit Hilfe des Integrals von Formen in Satz 5.35 kann diese Gleichung als

$${}^{\circ}_{[t_0, t_1]} \int_{[t_0, t_1]} df = {}^{\circ}_{\{t_0, t_1\}} \int_{\{t_0, t_1\}} f$$

umgeschrieben werden, wobei $df \in \Omega_{\text{komp}}^1([t_0, t_1])$ das Differential von f ist und

$$\circ_{\{t_0, t_1\}}(t_0) = -1, \quad \circ_{\{t_0, t_1\}}(t_1) = +1.$$

Streng genommen ist aber $[t_0, t_1]$ keine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit denn t_0 und t_1 besitzen keine Umgebung in $[t_0, t_1]$, die homöomorph zu \mathbb{R} ist. Um die Formel (5.15) in unser Situation zu übersetzen müssen wir daher, den Begriff von Mannigfaltigkeit zu dem Fall leicht verallgemeinern, in dem Punkte existieren, die eine Umgebung besitzen, die homöomorph zu einem Halbraum $\{x^1 \leq 0\}$ im euklidischen Raum ist. Das wird im nächsten Abschnitt gemacht.

5.6 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Definition 5.41. Wir schreiben

$$\mathbb{H}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leq 0\}, \quad \partial\mathbb{H}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

und sagen, dass $\partial\mathbb{H}^n$ der Rand von \mathbb{H}^n ist.

Es sei W eine offene Menge von \mathbb{H}^n . Eine Abbildung $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}$ heißt glatt, wenn eine Erweiterung $\tilde{\psi} : \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer offenen Menge \tilde{W} von \mathbb{R}^n existiert, die glatt im üblichen Sinn ist. Die Funktion $\tilde{\psi}$ heißt Erweiterung von ψ , wenn $\tilde{W} \cap \mathbb{H}^n = W$ und $\tilde{\psi}|_W = \psi$. \triangle

Bemerkung 5.42. Man kann im Prinzip als Modell für \mathbb{H}^n jeden Halbraum $\{\pm x^i \leq 0\}$ nehmen. Mit unserer Wahl zeigt das erste Koordinatenvektorfeld ∂_{x^1} außerhalb \mathbb{H}^n (an den Punkten des Randes). Auf dieser Weise ist die standard-Orientierung auf \mathbb{R}^n die direkte Summe von einem Vektorfeld, das außerhalb \mathbb{H}^n zeigt, und von der standard-Orientierung von $\mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{H}^n$. Somit bekommen wir kein Vorzeichen in der Formel von Stokes (5.18). \triangle

Definition 5.43. Eine n -dimensionale Karte mit Rand für einen topologischen Raum M ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$, wobei $U \subset M$ offen ist und $V \subset \mathbb{H}^n$ offen ist. Wenn $V^\partial := V \cap \partial\mathbb{H}^n$ nicht leer ist, dann definieren wir $U^\partial := \varphi^{-1}(V^\partial)$ und den eingeschränkten Homöomorphismus $\varphi^\partial : U^\partial \rightarrow V^\partial$. \triangle

Definition 5.44. Zwei n -dimensionale Karten mit Rand φ_1, φ_2 heißen verträglich, wenn

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ein Diffeomorphismus ist (also besitzt $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ eine Erweiterung zwischen offenen Mengen des \mathbb{R}^n , die ein Diffeomorphismus ist). Die Karten sind miteinander orientiert, wenn $\det d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) > 0$. \triangle

Definition 5.45. Ein n -dimensionaler Atlas mit Rand $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ auf einem topologischen Raum M ist eine Familie von n -dimensionalen Karten mit Rand, sodass $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M ist und die Karten paarweise verträglich miteinander sind. Der Atlas heißt orientiert, falls die Karten paarweise miteinander orientiert sind. Zwei Atlanten heißen äquivalent, wenn die Karten des ersten verträglich mit den Karten des zweiten sind (und umgekehrt). Eine glatte (gegebenenfalls orientierte), n -dimensionale Mannigfaltigkeit M mit Rand ist ein hausdorffscher topologischer Raum mit abzählbarer Basis versehen mit einer Äquivalenzklasse von (gegebenenfalls orientierten) n -dimensionalen Atlanten mit Rand. \triangle

Um den Rand einer Mannigfaltigkeit mit Rand zu definieren brauchen wir einen wichtigen Hilfssatz, den wir aus zeitlichen Gründen nicht beweisen können.

Hilfssatz 5.46. Wenn φ_1, φ_2 zwei verträglichen Karten mit Rand sind, dann

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(U_1 \cap U_2)^\partial) = (\varphi_2(U_1 \cap U_2)^\partial) = \varphi_2^\partial(U_1^\partial \cap U_2^\partial) = \varphi_2^\partial \circ (\varphi_1^\partial)^{-1}(\varphi_1^\partial(U_1^\partial \cap U_2^\partial)).$$

Außerdem ist $\varphi_2^\partial \circ (\varphi_1^\partial)^{-1} : \varphi_1^\partial(U_1^\partial \cap U_2^\partial) \rightarrow \varphi_2^\partial(U_1^\partial \cap U_2^\partial)$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Menge des \mathbb{R}^{n-1} und

$$\det d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) > 0 \quad \implies \quad \det d(\varphi_2^\partial \circ (\varphi_1^\partial)^{-1}) > 0. \quad \square$$

Definition 5.47. Es sei M eine glatte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und Äquivalenzklasse von Atlanten $[\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}]$. Der Rand ∂M von M ist der (möglicherweise leere) hausdorffsche, topologische Raum mit abzählbarer Basis $\partial M := \bigcup_{i \in I} U_i^\partial$. Die Äquivalenzklasse $[\{(U_i^\partial, \varphi_i^\partial)\}_{i \in I}]$ von Atlanten auf ∂M induziert eine wohldefinierte Struktur einer $(n-1)$ -dimensionalen, glatten Mannigfaltigkeit ohne Rand auf ∂M . Wenn die Äquivalenzklasse $[\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}]$ orientiert ist, ist dann auch $[\{(U_i^\partial, \varphi_i^\partial)\}_{i \in I}]$ orientiert. Die so entstandene Orientierung $\mathfrak{o}_{\partial M}$ auf ∂M heißt induzierte Orientierung auf dem Rand. \triangle

Man kann Tensoren, Vektorbündel und so weiter auch auf Mannigfaltigkeiten mit Rand definieren. Die Idee ist, dass die Koordinaten dieser Objekte eine glatte Erweiterung von offenen Menge von \mathbb{H}^n zu offenen Mengen von \mathbb{R}^n besitzen müssen. Zum Beispiel haben

wir immer eine glatte Einbettung $j : \partial M \rightarrow M$ und ein Schnitt $\nu \in \Gamma({}^tTM)$ existiert, sodass $dx^1(\nu) > 0$ in jeder Karte um einen Randpunkt. Das heißt, dass ν außerhalb M zeigt. Dann gilt ${}^jTM = \mathbb{R}\nu \oplus T\partial M$ und

$${}^j\mathfrak{o}_M = \mathfrak{o}_\nu \oplus \mathfrak{o}_{\partial M}, \quad (5.16)$$

wobei \mathfrak{o}_ν die von ν gegebene Orientierung auf $\mathbb{R} \cdot \nu$ ist, und $\mathfrak{o}_{\partial M}$ die nach Definition 5.47 induzierte Orientierung auf dem Rand ist (siehe auch Bemerkung 5.42).

Beispiel 5.48. Mannigfaltigkeiten mit Rand treten sehr oft als Subniveaumengen von glatten Funktionen auf. Es sei dafür \tilde{M} eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, $f : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, sodass $f^{-1}(c)$ nicht leer ist und $d_p f \neq 0$ für alle $p \in f^{-1}(c)$ gilt. Dann ist $M := \{p \in \tilde{M} \mid f(p) \leq c\}$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = f^{-1}(c)$.

Auf dieser Weise finden wir, dass der abgeschlossene Ball $B_R^n \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial B_R^n = S_R^{n-1}$ ist. \triangle

5.7 Das äußere Differential und der Satz von Stokes

Um den Satz von Stokes vorzustellen, brauchen wir noch den Begriff des äußeren Differentials einer k -Form auf M , der das übliche Differential einer glatten Funktion verallgemeinert. Aus zeitlichen Gründen beweisen wir dieses Resultat nicht.

Satz 5.49. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit (mit Rand). Für alle $k \in \mathbb{N}$ existieren eindeutige lineare Operatoren $d^{(k)} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:*

(a) **Differential von Funktionen:** für alle $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ ist $d^{(1)}f$ das übliche Differential von Funktionen;

(b) **Leibniz Regel:** für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $\eta_1 \in \Omega^{k_1}(M)$ und $\eta_2 \in \Omega^{k_2}(M)$ gilt

$$d^{(k_1+k_2)}(\eta_1 \wedge \eta_2) = (d^{(k_1)}\eta_1) \wedge \eta_2 + (-1)^{k_1}\eta_1 \wedge (d^{(k_2)}\eta_2);$$

(c) **Satz von Schwarz:** für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $d^{(k+1)} \circ d^{(k)} = 0$.

Der gesamte Operator $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$, wobei $\Omega(M) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(M)$, heißt äußere Differential und erfüllt die zusätzlichen Eigenschaften:

(i) **Kommutativität mit Pullback:** für alle glatten Abbildungen $F : N \rightarrow M$ und $\eta \in \Omega(M)$ gilt $F^*(d\eta) = d(F^*\eta)$.

(ii) **Koordinatendarstellung:** es sei (U, \mathbf{x}) eine Karte und $\eta \in \Omega(M)$. Dann

$$\eta|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k} \eta_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \Rightarrow \quad d\eta|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k};$$

(iii) **Magische Formel von Cartan:** für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\eta \in \Omega(M)$ gilt

$$\mathcal{L}_X \eta = d(\iota_X \eta) + \iota_X(d\eta). \quad \square$$

Bemerkung 5.50. Die magische Formel von Cartan bestimmt d eindeutig dank des Satzes 8.22 in Diffgeo 1 und gibt uns eine Formel für $d\eta(X_0, \dots, X_k)$, wobei $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, durch die Lie-Klammern

$$\begin{aligned} d\eta(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \mathcal{L}_{X_i} \left(\eta(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k) \right) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+1} \eta(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, [X_i, X_j], X_{j+1}, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Wenn η eine 1-Form ist, gewinnen wir die Formel des äußeren Differentials einer 1-Form, wie wir in Definition 9.38 in Diffgeo 1 gesehen haben. \triangle

Bemerkung 5.51. Es gilt $T(d\eta) \subset T(\eta)$ (warum?) für alle $\eta \in \Omega(M)$. Also besitzt das äußere Differential einer Form mit kompaktem Träger wieder kompakten Träger. \triangle

Bemerkung 5.52. Es sei ∇ eine symmetrische kovariante Ableitung auf TM . Die induziert eine kovariante Ableitung auf den Vektorbündel der kovarianten Tensoren $(T^*M)^{\otimes k}$ der Stufe k . Wenn $\eta \in \Omega^k(M) \subset \Gamma((T^*M)^{\otimes k})$, dann bekommen wir

$$\nabla \eta \in \Gamma((T^*M)^{\otimes(k+1)}).$$

Es sei $\mathcal{A} : (T^*M)^{\otimes(k+1)} \rightarrow \Lambda^{k+1} T^*M$ die Antisymmetrisierung. Wir behaupten, dass

$$\mathcal{A}(\nabla \eta) = \frac{1}{k+1} d\eta. \quad (5.17)$$

Erstens finden wir die vereinfachte Formel für die Antisymmetrisierung

$$\mathcal{A}(\nabla \eta) = \frac{1}{k+1} \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i (\nabla_{X_i} \eta)(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k)$$

denn η ist schon antisymmetrisch. Zweitens benutzen wir die Kommutativität zwischen der kovarianten Ableitung und der Kontraktion:

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_i} \eta)(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k) &= \nabla_{X_i} (\eta(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k)) \\ &\quad - \sum_{j \neq i} \eta(X_0, \dots, X_{j-1}, \nabla_{X_i} X_j, X_{j+1}, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Der erste Term liefert den ersten Term auf der linken Seite der Formel in Bemerkung 5.50. Für den zweiten Term trennen wir die Summe und vertauschen die Indizes in der zweite

Untersumme:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \sum_{j \neq i} (-1)^{i+1} \eta(X_0, \dots, X_{j-1}, \nabla_{X_i} X_j, X_{j+1}, \dots, X_k) \\
&= \sum_i \sum_{i < j} (-1)^{i+1} \eta(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, \nabla_{X_i} X_j, X_{j+1}, \dots, X_k) \\
&\quad + \sum_i \sum_{i < j} (-1)^{j+1} \eta(X_0, \dots, X_{i-1}, \nabla_{X_j} X_i, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k) \\
&= \sum_i \sum_{i < j} (-1)^{i+1} \eta(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, \nabla_{X_i} X_j, X_{j+1}, \dots, X_k) \\
&\quad + \sum_i \sum_{i < j} (-1)^{j+1} (-1)^{j-i-1} \eta(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, \nabla_{X_j} X_i, X_{j+1}, \dots, X_k) \\
&= \sum_i \sum_{i < j} (-1)^{i+1} \eta(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, [X_i, X_j], X_{j+1}, \dots, X_k),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung die Symmetrie von ∇ (also $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j]$) benutzt wurde. \triangle

Wir können nun den Satz von Stokes ohne Beweis geben.

Satz 5.53 (Satz von Stokes). *Es sei (M, \mathfrak{o}_M) eine orientierte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit (möglicherweise leerem) orientiertem Rand $(\partial M, \mathfrak{o}_{\partial M})$ und sei $j : \partial M \rightarrow M$ die Inklusion. Dann gilt*

$$\int_M^{\circ M} d\eta = \int_{\partial M}^{\circ \partial M} j^* \eta, \quad \forall \eta \in \Omega_{\text{komp}}^{n-1}(M), \quad (5.18)$$

wobei das Integral auf der rechten Seite gleich null zu verstehen ist, falls ∂M leer ist.

Bemerkung 5.54. Wir werden den Satz von Stokes im Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet später benutzen. Als unmittelbare Anwendung wollen wir hier den Divergenzsatz präsentieren. Es sei (M, g, \mathfrak{o}_M) eine orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit kompaktem Träger. Die Divergenz $\text{div } X : M \rightarrow \mathbb{R}$ von X ist definiert durch $(\text{div } X) \cdot \text{vol}_g = \mathcal{L}_X \text{vol}_g$. Nach der Formel von Cartan gilt $\mathcal{L}_X \text{vol}_g = d(\iota_X \text{vol}_g)$. Es sei nun $j : \partial M \rightarrow M$ die Inklusion und es sei ν ein normierter Schnitt von \mathcal{N}_j , der außerhalb M zeigt. Wir behaupten, dass

$$j^*(\iota_X \text{vol}_g) = g(X, \nu) \text{vol}_{j^*g}. \quad (5.19)$$

Denn, wir haben $X = g(X, \nu)\nu + d_j \cdot Y$, wobei $Y \in \mathfrak{X}(\partial M)$. Nach der Formel (5.8) gilt

$$j^*(\iota_X \text{vol}_g) = g_j(X, \nu) j^*(\iota_\nu \text{vol}_g) + j^*(\iota_{d_j Y} \text{vol}_g) = g_j(X, \nu) \text{vol}_{j^*g} + \iota_Y j^* \text{vol}_g$$

und $j^* \text{vol}_g$ verschwindet als n -Form auf einer $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Aus (5.19) und dem Satz von Stokes finden wir schließlich

$$\int_M^{\circ M} \text{div } X \text{vol}_g = \int_{\partial M}^{\circ \partial M} g_j(X, \nu) \text{vol}_{j^*g}.$$

Auf der linken Seite steht die infinitesimale Änderung des gesamten Volumen der Region M entlang dem Fluss von X und auf der rechten Seite steht der Fluss (hier wird das Wort *Fluss* mit zwei verschiedenen Bedeutungen benutzt) durch den Rand der Region M . \triangle

6 Krümmung von PR-Mannigfaltigkeiten

Wir haben die Krümmung einer kovarianten Ableitung ∇ auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ vom Rang h schon in Differentialgeometrie 1 getroffen. Die Krümmung ist ein Tensorfeld $R^\nabla \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \text{End}E)$

$$R^\nabla(X, Y)\sigma := \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X, Y]}\sigma \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \sigma \in \Gamma(E),$$

welches das Hindernis zur lokalen Existenz paralleler Rahmen darstellt. Das heißt: R^∇ verschwindet in einer Umgebung von $p \in M$ genau dann, wenn ein Rahmen e_1, \dots, e_h von E um p mit $\nabla e_k = 0$ existiert.

Wir erinnern uns, dass wenn ω die Matrix der Zusammenhangsformen bezüglich eines Rahmens e_1, \dots, e_h auf $U \subset M$ ist, dann wird R^∇ lokal durch die Matrix von 2-Formen

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \in \Gamma(T^*U \otimes T^*U \otimes \text{End}(\mathbb{R}^h)) \quad (6.1)$$

dargestellt. Das heißt:

$$R^\nabla(v_1, v_2)e_k = \sum_{l=1}^h \Omega_k^l(v_1, v_2)e_l, \quad \forall p \in U, v_1, v_2 \in T_pM. \quad (6.2)$$

Wenn $F : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung ist und ${}^F\nabla$ die Pullback kovariante Ableitung auf ${}^F E$ darstellt, dann gilt für alle $\sigma \in \Gamma(E)$:

$$R_p^{F\nabla}(v_1, v_2)\sigma \circ F(p) = R_{F(p)}^\nabla(d_p F \cdot v_1, d_p F \cdot v_2)\sigma(F(p)), \quad \forall p \in N, v_1, v_2 \in T_pM. \quad (6.3)$$

Diese Formel ist eine Folgerung der Tatsache, dass $F^*\Omega = d(F^*\omega) + (F^*\omega) \wedge (F^*\omega)$ die Darstellung der Krümmung $R^{F\nabla}$ bezüglich des Rahmen $e_1 \circ F, \dots, e_h \circ F$ ist.

Wenn ∇ die Levi-Civita Ableitung einer PR-Mannigfaltigkeit (M, g) ist, dann heißt R^∇ der Riemannsche Krümmungstensor oder die Krümmung der PR-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 6.1. Die Zusammenhangsformen der Levi-Civita Ableitung von $\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}$ verschwinden. Daher verschwindet auch die Krümmung von $\mathbb{R}^{\sigma_+, \sigma_-}$. \triangle

6.1 Die Symmetrien der Krümmung

Es sei (M, g) eine n -dimensionale PR-Mannigfaltigkeit und R seine Krümmung. Wenn e_1, \dots, e_n eine Basis von T_pM ist, dann wird R_p durch die n^4 Zahlen

$$R_{ijk}^l(p) := (\Omega_k^l)_p(e_i, e_j) = e^l(R_p(e_i, e_j)e_k)$$

bestimmt. Wir werden aber jetzt sehen, dass diese n^4 Zahlen nicht völlig unabhängig voneinander sind. Das heißt, dass die Krümmung bestimmte Symmetrieeigenschaften erfüllt. Zum Beispiel gilt $R_{ijk}^l = -R_{jik}^l$ denn die Krümmung antisymmetrisch in den ersten zwei Einträge ist. Um die Symmetrien besser zu identifizieren, definieren wir zuerst das kovariante Tensorfeld $R \in \Gamma((T^*M)^{\otimes 4})$ gegeben durch

$$R_p(v_1, v_2, v_3, v_4) := g_p(R_p(v_1, v_2)v_3, v_4), \quad \forall p \in M, \quad \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_pM.$$

Da g nicht ausgeartet ist, können wir die Krümmung aus dieser kovarianten Tensorfeld zurückgewinnen.

Satz 6.2. *Es sei R die Krümmung einer PR-Mannigfaltigkeit (M, g) . Für alle $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ gilt*

- (a) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$ (das kommt aus der Definition von Krümmung)
- (b) $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ (das kommt aus der Verträglichkeit der kovarianten Ableitung mit der Metrik);
- (c) $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$ (das kommt aus der Symmetrie der kovarianten Ableitung).

Aus diesen Eigenschaften folgt:

$$(d) \quad R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y),$$

sodass für alle Y die Bilinearform

$$(X, W) \mapsto R(X, Y, Y, W) = R(Y, X, W, Y) \quad \text{symmetrisch ist.} \quad (6.4)$$

Bemerkung 6.3. Eigenschaft (b) lässt sich auch als

$$(G\Omega) + (G\Omega)^T = 0$$

scheiben, wobei G die Matrixdarstellung von g bezüglich eines Rahmens ist. Das folgt, indem wir das äußere Differential von (4.4) nehmen.

Eigenschaft (c) lässt sich auch als

$$\Omega \wedge e = 0$$

umschreiben, wobei e der Spaltenvektor der 1-Formen (e^1, \dots, e^n) ist. Das folgt, indem wir das äußere Differential von (4.5) nehmen. \triangle

Beweis. Eigenschaft (a) folgt unmittelbar aus der Definition der Krümmung. Für (b) reicht es zu zeigen $R(X, Y, Z, Z) = 0$. Wir berechnen

$$g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) = \mathcal{L}_X(g(\nabla_X Z, Z)) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y (g(Z, Z)) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z)$$

Auf ähnlicher Weise $g(\nabla_{[X,Y]}Z, Z) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{[X,Y]}(g(Z, Z))$, sodass

$$R(X, Y, Z, Z) = (\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X - \mathcal{L}_{[X,Y]})(g(Z, Z)) = 0$$

nach Formel (8.13) in Diffgeo I.

Um (b) zu beweisen, benutzen wir die folgende Notation: wenn $A : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ schreiben wir

$$\mathfrak{S}A : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad \mathfrak{S}A(X, Y, Z) = A(X, Y, Z) + A(Y, Z, X) + A(Z, X, Y).$$

Der Operator \mathfrak{S} ist linear und invariant unter zyklischen Permutationen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}R(X, Y)Z &= \mathfrak{S}(\nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= \mathfrak{S}(\nabla_X\nabla_YZ) - \mathfrak{S}(\nabla_Y\nabla_XZ) - \mathfrak{S}(\nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= \mathfrak{S}(\nabla_Z\nabla_XY) - \mathfrak{S}(\nabla_Z\nabla_YX) - \mathfrak{S}(\nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= \mathfrak{S}(\nabla_Z\nabla_XY - \nabla_Z\nabla_YX - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= \mathfrak{S}(\nabla_Z[X, Y] - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= \mathfrak{S}([Z, [X, Y]]) \end{aligned}$$

und der letzte Term verschwindet dank der Jacobi Identität.

Um (d) zu zeigen, benutzen wir (c) viermal:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) &= 0 \\ R(X, Y, Z, W) + R(Y, W, Z, X) + R(W, X, Z, Y) &= 0 \\ R(Z, W, X, Y) + R(W, Y, X, Z) + R(Y, Z, X, W) &= 0 \\ R(Z, W, X, Y) + R(W, X, Z, Y) + R(X, Z, W, Y) &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten und dritten Gleichung auch (b) benutzt haben. Nun addieren wir die erste und die zweite Gleichung und subtrahieren die dritte und vierte. Mittels (a) und (b) bekommen wir die gewünschte Identität

$$2R(X, Y, Z, W) - 2R(Z, W, X, Y) = 0.$$

Schließlich gilt mit Hilfe von (a), (b) und (d)

$$R(X, Y, Y, W) = R(Y, W, X, Y) = R(W, Y, Y, X). \quad \square$$

Definition 6.4. Es sei $\mathcal{K} \rightarrow M$ das Unterbündel von $T^*M^{\otimes 4}$ dessen Elemente (a), (b), (c) (und daher (d)) erfüllen. Die Schnitte von \mathcal{K} heißen algebraische Krümmungstensorfelder (unten als AKT abgekürzt). \triangle

Bemerkung 6.5. Wir zeigen im Aufgabenblatt 9, dass $\mathcal{K} \rightarrow M$ tatsächlich ein Vektorbündel von Rang $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ ist. Wenn A ein AKT und v_1, \dots, v_n eine Basis von T_pM ist, dann existieren genau $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ der Zahlen $A_p(v_i, v_j, v_k, v_l)$ die den Tensor in p bestimmen. \triangle

Bemerkung 6.6. Es sei g eine PR-Metrik, dann ist $g \otimes g$ definiert als

$$g \otimes g(X, Y, Z, W) := g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)$$

ein AKT (bitte prüfen Sie es). In der Literatur ist üblicher $g \otimes g$ mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ zu definieren, dann ist $g \otimes g$ das sogenannte Kulkarni-Nomizu Produkt zwischen g und g . \triangle

Wir wollen nun ein Kriterium geben für die Gleichheit zwischen zwei AKT. Die Idee ist, dass es reicht, AKT auf Quadrupel der Art (X, Y, Y, X) zu evaluieren.

Satz 6.7. *Es seien A_1, A_2 zwei AKT, sodass*

$$A_1(X, Y, Y, X) = A_2(X, Y, Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

dann gilt $A_1 = A_2$.

Beweis. Sei $\Delta := A_2 - A_1$. Dann ist Δ ein AKT und $\Delta(X, Y, Y, X) = 0$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Wir wollen zeigen $\Delta = 0$. Nach (6.4) gilt $\Delta(X, Y, Y, W) = 0$ für alle X, Y, W . Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(X, Y + Z, Y + Z, W) \\ &= \Delta(X, Y, Y, W) + \Delta(X, Y, Z, W) + \Delta(X, Z, Y, W) + \Delta(X, Z, Z, W) \\ &= 0 + \Delta(X, Y, Z, W) + \Delta(X, Z, Y, W) + 0. \end{aligned}$$

Also $\Delta(X, Y, Z, W) = -\Delta(X, Z, Y, W)$ (diese Eigenschaft zeigt zusammen mit (a), dass Δ antisymmetrisch in den ersten drei Einträgen ist). Dann nach (c) haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(X, Y, Z, W) + \Delta(Y, Z, X, W) + \Delta(Z, X, Y, W) \\ &= \Delta(X, Y, Z, W) - \Delta(Y, X, Z, W) - \Delta(X, Z, Y, W) \\ &= \Delta(X, Y, Z, W) + \Delta(X, Y, Z, W) + \Delta(X, Y, Z, W) \\ &= 3\Delta(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

Da X, Y, Z, W beliebig waren, folgt $\Delta = 0$. □

Wir studieren nun die Zahlen $A(X, Y, Y, X)$ für ein AKT A genauer. Wenn X und Y linear abhängig sind, dann ist $A(X, Y, Y, X) = 0$ nach (a) (oder (b)). Es sei nun angenommen, dass $\Pi := \mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y$ zwei-dimensional ist. Wenn X', Y' eine weitere Basis von Π ist, dann gilt $X' = aX + bY$ und $Y' = cX + dY$ und nach (a) und (b):

$$A(X', Y', Y', X') = (ad - bc)A(X, Y, Y', X') = (ad - bc)^2 A(X, Y, Y, X).$$

Also ändern sich diese Zahlen durch das Quadrat der Determinante des Basiswechsels. Wir können daher das AKT $g \otimes g$ benutzen, um den Wert der Krümmung auf den Quadrupeln zu normieren.

Definition 6.8. Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und R die dazugehörige Krümmung. Die Schnittkrümmung einer nicht ausgearteten (bezüglich g) zwei-dimensionalen Ebene $\Pi \subset T_p M$ ist gegeben als

$$K(\Pi) := \frac{R(X, Y, Y, X)}{g \otimes g(X, Y, Y, X)},$$

wobei X, Y eine beliebige Basis von Π ist. Wir sagen, dass (M, g) konstante Krümmung in p besitzt, wenn $K(p) \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$K(\Pi) = K(p)$$

für alle nicht ausgeartete Ebenen in $T_p M$. Wir sagen, dass (M, g) konstante Krümmung besitzt, wenn $K \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$K(\Pi) = K$$

für alle $p \in M$ und alle nicht ausgeartete Ebenen in $T_p M$ gilt. \triangle

Bemerkung 6.9. Die Schnittkrümmung ist wohldefiniert, da $g \otimes g(X, Y, Y, X)$ die Determinante der Matrix ist, die g bezüglich der Basis X, Y darstellt. \triangle

Satz 6.10. *Es seien $p \in M$ und $K \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann besitzt (M, g) konstante Krümmung K in p genau dann, wenn*

$$R_p(X, Y)Z = K \cdot (g_p(Y, Z)X - g_p(X, Z)Y). \quad (6.5)$$

Beweis. Wenn die Formel (6.5) gilt, dann $R_p(X, Y, Y, X) = K g_p \otimes g_p(X, Y, Y, X)$ und die Krümmung ist konstant gleich K in p . Umgekehrt sei angenommen, dass die Krümmung konstant gleich K in p ist. Dann $R_p(X, Y, Y, X) = K g_p \otimes g_p(X, Y, Y, X)$ für alle X, Y , die eine nicht ausgeartete Ebene aufspannen. Man kann aber alle Paare von Vektoren durch Paare X, Y mit dieser Eigenschaft approximieren. Anhand der Stetigkeit von R_p und $g_p \otimes g_p$ gilt

$$R_p(X, Y, Y, X) = K g_p \otimes g_p(X, Y, Y, X)$$

für alle Paare von Vektoren. Nach Satz 6.7 finden wir, dass $R_p = K g_p \otimes g_p$, die äquivalent zu (6.5) ist. \square

Bemerkung 6.11. Wenn $\dim M = 2$, dann ist $T_p M$ die einzige nicht ausgeartete Ebene in $T_p M$. Für alle $p \in M$ besitzt daher (M, g) konstante Krümmung in p . Nach Satz 6.10 existiert eine Funktion $K : M \rightarrow \mathbb{R}$, die sogenannte Gauß-Krümmung, sodass

$$R_p(X, Y)Z = K(p) \cdot (g_p(Y, Z)X - g_p(X, Z)Y).$$

Es sei nun $\dim M \geq 3$ und wir nehmen umgekehrt an, dass eine Funktion $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $R_p(X, Y)Z = K(p) \cdot (g_p(Y, Z)X - g_p(X, Z)Y)$ (das heißt, für alle $p \in M$ besitzt (M, g) konstante Krümmung in p). Nach Bemerkung 6.36 ist dann K konstant (das heißt, die Krümmung von (M, g) ist konstant). \triangle

Bis jetzt kennen wir nur die Krümmung des flachen Raums $\mathbb{R}^{\sigma_+ \cdot \sigma_-}$ (siehe Beispiel 6.1). Um die Krümmung von anderen Mannigfaltigkeiten zu berechnen, werden wir nun eine Beziehung finden zwischen der Krümmung von (M, g) und (\tilde{M}, \tilde{g}) , falls eine isometrische Immersion $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ existiert.

6.2 Krümmung von isometrischen Immersionen

Es sei $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion und seien $\nabla, \tilde{\nabla}$ die zugehörige Levi-Civita Ableitungen. Wir haben ${}^F T\tilde{M} = \mathcal{N}_F \oplus TM$ und wir haben orthogonale Projektionen

$$\Pi : {}^F T\tilde{M} \rightarrow TM, \quad \Pi : {}^F T\tilde{M} \rightarrow \mathcal{N}_F, \quad \text{id}_{{}^F T\tilde{M}} = \Pi + dF \cdot \Pi, \quad \Pi \cdot dF = 0. \quad (6.6)$$

Wir wissen, dass $\nabla = \Pi \circ {}^F \tilde{\nabla} dF$. Also, ∇ ist die Komponente von ${}^F \tilde{\nabla}$, die tangential zu M ist. Wir definieren nun die Komponente von ${}^F \tilde{\nabla}$, die senkrecht zu M steht.

Definition 6.12. Die zweite Fundamentalform der isometrischen Immersion F ist das Tensorfeld $II \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \mathcal{N}_F)$ auf M , das durch

$$II := \Pi \circ {}^F \tilde{\nabla} dF.$$

gegeben ist. Also gilt

$${}^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot Y = dF \cdot \nabla_X Y + II(X, Y).$$

△

Satz 6.13. Die zweite Fundamentalform ist tatsächlich tensoriell und symmetrisch:

$$II(X, Y) = II(Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Beweis. Nach Definition gilt $II(X, Y) = \Pi \circ {}^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot Y$, sodass die Tensorialität in X klar ist. Wir zeigen nun die Symmetrie, was auch automatisch die Tensorialität in Y liefert:

$$\begin{aligned} II(X, Y) - II(Y, X) &= \Pi \circ {}^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot Y - \Pi \circ {}^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot X = \Pi \left({}^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot Y - {}^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot X \right) \\ &= \Pi(dF \cdot [X, Y]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass ${}^F \tilde{\nabla}$ symmetrisch nach Satz 4.12 ist. □

Wir können nun die Krümmung R von M als Funktion der Krümmung \tilde{R} von \tilde{M} und der zweiten Fundamentalform schreiben.

Satz 6.14 (Gauß-Formel). *Es sei $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion mit zweiter Fundamentalform II und Krümmungen R und \tilde{R} von g und \tilde{g} . Für alle $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ gilt*

$$R(X, Y, Z, W) = F^* \tilde{R}(X, Y, Z, W) + \tilde{g}_F(II(X, W), II(Y, Z)) - \tilde{g}_F(II(X, Z), II(Y, W)).$$

Beweis. Wir benutzen (6.6), um zu berechnen

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) &= g(\Pi^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot \nabla_Y Z, W) \\
&= \tilde{g}_F(dF \cdot \Pi^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot \nabla_Y Z, dF \cdot W) \\
&= \tilde{g}_F({}^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot \nabla_Y Z, dF \cdot W) \\
&= \tilde{g}_F({}^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot \Pi^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot Z, dF \cdot W) \\
&= \tilde{g}_F({}^F \tilde{\nabla}_X {}^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot Z, dF \cdot W) - \tilde{g}_F({}^F \tilde{\nabla}_X \Pi^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot Z, dF \cdot W) \\
&= \tilde{g}_F({}^F \tilde{\nabla}_X {}^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot Z, dF \cdot W) - \tilde{g}_F(\Pi^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot Z, {}^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot W) \\
&= \tilde{g}_F({}^F \tilde{\nabla}_X {}^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot Z, dF \cdot W) + \tilde{g}_F(\Pi^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot Z, \Pi^F \tilde{\nabla}_X dF \cdot W) \\
&= \tilde{g}_F({}^F \tilde{\nabla}_X {}^F \tilde{\nabla}_Y dF \cdot Z, dF \cdot W) + \tilde{g}_F(II(Y, Z), II(X, W)).
\end{aligned}$$

Auf ähnlicher Weise bekommen wir, $g(\nabla_Y \nabla_X Z, W)$ und

$$g(\nabla_{[X,Y]} Z, W) = \tilde{g}_F(dF \cdot \Pi^F \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z, dF \cdot W) = \tilde{g}_F({}^F \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z, dF \cdot W).$$

Wenn wir alles zusammen basteln, finden wir

$$\begin{aligned}
R(X, Y, Z, W) &= \tilde{g}_F(R^F \tilde{\nabla}(X, Y) dF \cdot Z, dF \cdot W) + \tilde{g}_F(II(X, W), II(Y, Z)) \\
&\quad - \tilde{g}_F(II(X, Z), II(Y, W))
\end{aligned}$$

und schließlich nach (6.3)

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_F(R^F \tilde{\nabla}(X, Y) dF \cdot Z, dF \cdot W) &= \tilde{g}_F(\tilde{R}_F(dF \cdot X, dF \cdot Y) dF \cdot Z, dF \cdot W) \\
&= F^* \tilde{R}(X, Y, Z, W). \quad \square
\end{aligned}$$

Folgerung 6.15. *Ist $\tilde{R} = 0$ (zum Beispiel $(\tilde{M}, \tilde{g}) = \mathbb{R}^{\sigma^+ \cdot \sigma^-}$), dann bestimmt die zweite Fundamentalform die Krümmung R .*

Ist F eine lokale Isometrie, dann $R = F^ \tilde{R}$. Insbesondere gilt die Implikation*

$$(M, g) \text{ Rahmen homogen} \implies (M, g) \text{ hat konstante Krümmung.}$$

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Wenn F eine lokale Isometrie ist, dann ist $\mathcal{N}_F = 0$ und $II = 0$. Wir zeigen nun die letzte Aussage. Es seien $p, p' \in M$ und $\Pi \subset T_p$, $\Pi' \subset T_{p'} M$ zwei nicht ausgeartete Ebenen. Wir nehmen v_1, v_2 eine orthonormale Basis von Π und v'_1, v'_2 eine orthonormale Basis von Π' . Wenn $g|_\Pi$ und $g|_{\Pi'}$ die selbe Signatur besitzen, dann können wir orthonormale Basen v_1, v_2, \dots, v_n von $T_p M$ und v'_1, v'_2, \dots, v'_n von $T_{p'} M$ wählen, welche die gegebenen Basen von Π und Π' ergänzen. Da (M, g) Rahmen homogen ist, finden wir eine Isometrie $F : (M, g) \rightarrow (M, g)$ für die $d_p F \cdot v_i = v'_i$ für alle i . Dann

$$\begin{aligned}
K(\Pi) &= \frac{R_p(v_1, v_2, v_2, v_1)}{g_p \otimes g_p(v_1, v_2, v_2, v_1)} = \frac{(F^* R)_p(v_1, v_2, v_2, v_1)}{(F^* g)_p \otimes (F^* g)_p(v_1, v_2, v_2, v_1)} \\
&= \frac{R_{F(p)}(v'_1, v'_2, v'_2, v'_1)}{g_{F(p)} \otimes g_{F(p)}(v'_1, v'_2, v'_2, v'_1)} \\
&= K(\Pi').
\end{aligned}$$

Wenn g positiv (oder negativ) definit ist, dann besitzen $g|_{\Pi}$ und $g|_{\Pi'}$ zwangsläufig die selbe Signatur und wir sind fertig. Andernfalls wissen wir nur, dass die Schnittkrümmung aller positiv definiten Ebenen gleich K_+ ist, die Schnittkrümmung aller negativ definiten Ebenen gleich K_- ist und die Schnittkrümmung aller indefiniten Ebenen gleich K_0 ist. Wir zeigen nun, dass $K_+ = K_0$. Auf ähnlicher Weise wird $K_- = K_0$ folgen. Es existieren v_1, v_2, v_3 , die paarweise senkrecht stehen und $g(v_1, v_1) = 1 = g(v_2, v_2)$, $g(v_3, v_3) = -1$. Für alle $\lambda > 1$ betrachten wir $u_\lambda := \lambda v_2 + v_3$ und die Ebene $\Pi_\lambda := \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot u_\lambda$. Wir haben

$$g \otimes g(v_1, u_\lambda, u_\lambda, v_1) = \lambda^2 - 1 > 0$$

Also ist $g|_{\Pi_\lambda}$ positiv definit, sodass

$$R(v_1, u_\lambda, u_\lambda, v_1) = K_+(\lambda^2 - 1). \quad (6.7)$$

Andererseits liefert die Multilinearität von R

$$\begin{aligned} R(v_1, u_\lambda, u_\lambda, v_1) &= \lambda^2 R(v_1, v_2, v_2, v_1) + 2\lambda R(v_1, v_2, v_3, v_1) + R(v_1, v_3, v_3, v_1) \\ &= \lambda^2 K_+ + 2\lambda R(v_1, v_2, v_3, v_1) - K_0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Das Vergleichen von (6.7) und (6.8) gibt

$$2\lambda R(v_1, v_2, v_3, v_1) + (K_+ - K_0) = 0, \quad \forall \lambda > 1,$$

was $K_+ = K_0$ impliziert. □

Bemerkung 6.16. Die Kegel sind lokal isometrisch zu \mathbb{R}^2 . Aus der obigen Folgerung sehen wir, dass die Krümmung der Kegel verschwindet. △

Wenn wir die Gauß-Formel benutzen wollen, müssen wir die zweite Fundamentalform berechnen. Das folgende Resultat hilft uns das zu erledigen.

Satz 6.17. *Es sei $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion und $L : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Dann*

$$F \circ L \tilde{\nabla}_X d_L F \cdot Y = d_L F \cdot {}^L \nabla_X Y + II_L(dL \cdot X, Y), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(N), Y \in \Gamma({}^L TM).$$

Es sei nun $L = \gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\tilde{\gamma} := F \circ \gamma$ und $X = \partial_t$. Dann

$$\tilde{\gamma} \tilde{\nabla}_{\partial_t} d_\gamma F \cdot Y = d_\gamma F \cdot {}^\gamma \nabla_{\partial_t} Y + II_\gamma(\dot{\gamma}, Y), \quad \forall Y \in \Gamma({}^\gamma TM)$$

und insbesondere für $Y = \dot{\gamma}$

$$\tilde{\gamma} \tilde{\nabla}_{\partial_t} \dot{\tilde{\gamma}} = d_\gamma F \cdot {}^\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} + II_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}). \quad (6.9)$$

Beweis. Nach Formel (4.13) gilt

$${}^{F \circ L} \tilde{\nabla}_X d_L F \cdot Y = d_L F {}^L \nabla_X Y + \Pi {}^{F \circ L} \tilde{\nabla}_X d_L F \cdot Y.$$

Lokal können wir $Y = \sum_i f^i \cdot e_i \circ L$ schreiben, wobei $e_i \in \mathfrak{X}(M)$ und $f^i : N \rightarrow \mathbb{R}$. Dann

$$\Pi {}^{F \circ L} \tilde{\nabla}_X d_L F \cdot Y = \sum_i \left(df^i(X) \Pi d_L F \cdot e_i + f^i \Pi {}^{F \circ L} \tilde{\nabla}_X d_L F \cdot (e_i \circ F) \right).$$

Der erste Term in der Summe verschwindet. Für den zweiten Term berechnen wir

$$\Pi {}^{F \circ L} \tilde{\nabla}_X d_L F \cdot (e_i \circ L) = \Pi {}^L ({}^F \tilde{\nabla})_X d_L F \cdot (e_i \circ L) = \Pi {}^F \tilde{\nabla}_{dL \cdot X} (dF \cdot e_i) \circ L = II_L(dL \cdot X, e_i \circ L),$$

sodass

$$\Pi {}^{F \circ L} \tilde{\nabla}_X d_L F \cdot Y = \sum_i f^i II_L(dL \cdot X, e_i \circ L) = II_L(dL \cdot X, \sum_i f^i \cdot e_i \circ L) = II_L(dL \cdot X, Y).$$

□

Wir geben zwei Anwendungen des Satzes 6.17: die Berechnung der Krümmung von Sphären und hyperbolischen Räumen; ein Kriterium für das Verschwinden der zweiten Fundamentalform.

Beispiel 6.18. Wir zeigen nun, dass S_R^n konstante positive Krümmung $1/R^2$ besitzt. Auf ähnlicher Weise kann man zeigen, dass H_R^n konstante negative Krümmung $-1/R^2$ besitzt. Es sei $p \in S_R^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $v \in T_p S_R^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wir betrachten die Geodätische

$$\tilde{\gamma}(t) = \cos\left(\frac{|v|}{R}t\right)p + \sin\left(\frac{|v|}{R}t\right)\frac{R}{|v|}v.$$

Dann $\tilde{\gamma}'|_{t=0} = v$ und $\tilde{\gamma}''|_{t=0} = -\frac{|v|^2}{R^2}p$ und aus (6.9) folgt $II_p(v, v) = -\frac{|v|^2}{R^2}p$. Aus der Symmetrie von II finden wir

$$II_p(v_1, v_2) = -\frac{g_p(v_1, v_2)}{R^2}p$$

Wir setzen diese Formel in die Gauß-Formel ein und finden die gewünschte Formel

$$R_p(v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{1}{R^2}g_p \odot g_p(v_1, v_2, v_3, v_4), \quad \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_p S_R^n. \quad \triangle$$

Folgerung 6.19. *Es sei $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion und $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve, sodass $\tilde{\gamma} := F \circ \gamma$ eine Geodätische für (\tilde{M}, \tilde{g}) ist. Dann ist γ eine Geodätische für (M, g) und $II_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$.*

Beweis. Nach Voraussetzung verschwindet die linke Seite von (6.9). Da die zwei Terme auf der rechten Seite senkrecht zueinander stehen, verschwinden die auch. □

Die obige Folgerung motiviert uns die folgende Definition zu geben.

Definition 6.20. Eine isometrische Immersion $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ heißt total geodätisch in $p \in M$, falls $II_p = 0$. Die isometrische Immersion heißt total geodätisch, falls sie total geodätisch in allen $p \in M$ ist. \triangle

Bemerkung 6.21. Wenn F total geodätisch in p ist, gilt $R_p = (F^*\tilde{R})_p$ nach der Gauß-Formel. Das Beispiel der Kegel zeigt, dass die Gleichheit $R_p = (F^*\tilde{R})_p$ nicht impliziert, dass F total geodätisch in p ist. \triangle

Satz 6.22. Es sei $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion. Die folgende zwei Bedingungen sind äquivalent:

(a) F ist total geodätisch;

(b) für alle Geodätische $\gamma : I \rightarrow M$ für (M, g) , ist $\tilde{\gamma} := F \circ \gamma$ eine Geodätische für (\tilde{M}, \tilde{g}) .

Beweis. Es sei angenommen, dass $II = 0$. Ist γ eine Geodätische, dann verschwindet die rechte Seite von (6.9). Also ist $\tilde{\gamma}$ eine Geodätische. Wir zeigen nun die Umkehrung. Es sei $p \in M$ und $v \in T_pM$ beliebig. Wir nehmen eine Geodätische $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $\dot{\gamma}(0) = v$. Nach Voraussetzung ist $\tilde{\gamma}$ eine Geodätische und (6.9) liefert $II_p(v, v) = 0$. Da die zweite Fundamentalform symmetrisch ist und v beliebig war, folgt $II = 0$. \square

Wir können die Gauß-Formel benutzen, um eine geometrische Interpretation der Schnittkrümmung zu geben und ihren Namen zu begründen.

Satz 6.23. Es sei (\tilde{M}, \tilde{g}) eine PR-Mannigfaltigkeit und $\Pi \subset T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ ein nicht ausgearteter Untervektorraum bezüglich \tilde{g} . Es sei $M \subset \Pi$ eine Umgebung von $0 \in \Pi$, sodass $\exp_{\tilde{p}} : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine Einbettung ist, wobei $g := \exp_{\tilde{p}}^*\tilde{g}$. Dann ist $\exp_{\tilde{p}}$ total geodätisch in 0 und für alle $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \Pi$ gilt die Formel

$$R_0(v_1, v_2, v_3, v_4) = \tilde{R}_{\tilde{p}}(v_1, v_2, v_3, v_4), \quad g_0 \otimes g_0(v_1, v_2, v_3, v_4) = \tilde{g}_{\tilde{p}} \otimes \tilde{g}_{\tilde{p}}(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Insbesondere, wenn Π zwei-dimensional ist, ist die Schnittkrümmung $\tilde{K}(\Pi)$ gleich die Gauß-Krümmung $K(0)$ von (M, g) in 0 .

Also ist die Schnittkrümmung von Π die Gauß-Krümmung des Schnittes M , den wir erhalten, indem wir die Geodätischen in Richtungen $v \in \Pi$ betrachten.

Beweis. Es sei $v \in \Pi$ und $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ das Geradenstück $\gamma(t) = t \cdot v$. Dann ist $\exp_{\tilde{p}} \circ \gamma$ eine Geodätische in \tilde{M} . Aus Folgerung 6.19 folgt, dass $II_0(v, v) = 0$. Da v beliebig war, gilt $II_0 = 0$ und zwar ist $\exp_{\tilde{p}}$ total geodätisch in 0 . Da $d_0 \exp_{\tilde{p}} \cdot v = v$ für alle $v \in \Pi$ nach Satz 4.30.(d) liefert die Gauß-Formel

$$R_0(v_1, v_2, v_3, v_4) = (\exp_{\tilde{p}}^*\tilde{R})_0(v_1, v_2, v_3, v_4) = \tilde{R}_{\tilde{p}}(v_1, v_2, v_3, v_4), \quad \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in \Pi.$$

Wenn Π eine Ebene mit Basis v_1, v_2 ist, dann ist die Gauß-Krümmung von M in 0

$$K(0) = \frac{R_0(v_1, v_2, v_2, v_1)}{g_0 \otimes g_0(v_1, v_2, v_2, v_1)} = \frac{\tilde{R}_{\tilde{p}}(v_1, v_2, v_2, v_1)}{\tilde{g}_{\tilde{p}} \otimes \tilde{g}_{\tilde{p}}(v_1, v_2, v_2, v_1)} = \tilde{K}(\Pi). \quad \square$$

Wir haben gesehen, dass falls $\dim M = \dim \tilde{M}$ die Gauß-Formel sehr einfach ist. Wir wollen nun den nächsten Fall betrachten und zwar wenn M eine Hyperfläche in \tilde{M} ist: $\dim M = \dim \tilde{M} - 1$. In diesem Fall ist \mathcal{N}_F ein Vektorbündel vom Rang 1 und wir können lokal immer einen normierten Schnitt ν von \mathcal{N}_F mit $\tilde{g}(\nu, \nu) = \pm 1$ finden. Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, dass ν auf dem ganzen M definiert ist.

Definition 6.24. Der Formoperator ist $S \in \Gamma(\text{End}(TM))$ definiert durch

$$S \cdot X := -(dF)^{-1} {}^F \tilde{\nabla}_X \nu, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad \triangle$$

Satz 6.25. Der Formoperator ist wohldefiniert und es gilt

$$II(X, Y) = \pm g(S \cdot X, Y) \nu,$$

wobei das Vorzeichen von $\tilde{g}(\nu, \nu) = \pm 1$ abhängt. Insbesondere ist S symmetrisch bezüglich der Bilinearform g .

Beweis. Siehe Aufgabenblatt 9. □

Da S symmetrisch ist, existiert für alle $p \in M$ eine orthonormale Basis v_1, \dots, v_n aus Eigenvektoren von S , die sogenannten Haupttrichtungen. Die dazugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heißen Hauptkrümmungen. Die Gauß-Formel nimmt die folgende Gestalt, wenn wir II mit S substituieren.

Satz 6.26. Für alle $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ wird die Gauß-Formel zu

$$R(X, Y, Z, W) = F^* \tilde{R}(X, Y, Z, W) + g(S \cdot X, W)g(S \cdot Y, Z) - g(S \cdot X, Z)g(S \cdot Y, W).$$

Der Name *Formoperator* erinnert uns, dass S die Gestalt von (M, g) innerhalb (\tilde{M}, \tilde{g}) beschreibt, indem S die Ableitung der Normalenrichtung darstellt. In diesem Sinn gibt der Formoperator eine Art extrinsische Krümmung von (M, g) innerhalb (\tilde{M}, \tilde{g}) . Andererseits können wir denken, dass das Krümmungstensorfeld R die intrinsische Krümmung von (M, g) beschreibt. Was die Gauß-Formel besagt, ist, dass die intrinsische und extrinsische Krümmung eine Beziehung besitzen, die von der Krümmung \tilde{R} von (\tilde{M}, \tilde{g}) abhängt. Insbesondere, wenn $(\tilde{M}, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^3, g_{\mathbb{R}^3})$ bekommen wir aus Satz 6.26 das Theorema Egregium von Gauß: die Determinante des Formoperators S hängt nicht von der isometrischen Immersion F ab und ist durch die Gauß-Krümmung gegeben.

Satz 6.27. Es sei (M, g) eine zwei-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Gauß-Krümmung $K : M \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn $F : (M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^3, g_{\mathbb{R}^3})$ eine isometrische Immersion mit Formoperator S ist, gilt

$$K = \det S.$$

Beweis. Siehe Aufgabenblatt 9. □

Das Theorema Egregium von Gauß sagt also, dass für immersierte Flächen in \mathbb{R}^3 das Produkt der Hauptkrümmungen $\lambda_1 \lambda_2 = \det S$ nur von g abhängt. Es ist leicht zu sehen, dass λ_1 und λ_2 nicht nur von g abhängen. Zum Beispiel sind ein Zylinder und eine Ebene lokal isometrisch aber $S \neq 0$ im ersten Fall und $S = 0$ im zweiten Fall. Welche zusätzliche Informationen wir aus S entnehmen können, sehen wir in den folgenden zwei Beispielen.

Beispiel 6.28. Es sei angenommen, dass $F : (M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ eine isometrische Immersion mit normiertem Normalenvektorfeld $\nu : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ in einer Umgebung $U \subset M$ von $p \in U$, sodass S_p positiv definit ist. Dann ist $F(U)$ bis zur Einschränkung von U im Halbraum

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_{\mathbb{R}^n}(x, \nu_p) \geq g_{\mathbb{R}^n}(F(p), \nu_p)\}$$

enthalten und steht in $F(p)$ zur Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_{\mathbb{R}^n}(x, \nu_p) = g_{\mathbb{R}^n}(F(p), \nu_p)\}$ tangential. Es reicht dafür die Abbildung

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(q) := g_{\mathbb{R}^n}(F(q), \nu_p)$$

zu betrachten und zu zeigen, dass f ein lokales Minimum in $q = p$ besitzt. Da f glatt ist, genügt es zu beweisen, dass für alle $v \in T_p M$ und alle $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$ gilt $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f \circ \gamma = 0$ und $\frac{d^2}{dt^2}\big|_{t=0} f \circ \gamma > 0$. Wenn $\delta := F \circ \gamma$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f \circ \gamma(t) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g_{\mathbb{R}^n}(\delta(t), \nu_p) = g_{\mathbb{R}^n}(\dot{\delta}(0), \nu_p) = g_{\mathbb{R}^n}(v, \nu_p) = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} f \circ \gamma &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g_{\mathbb{R}^n}(\dot{\delta}(t), \nu_p) = g_{\mathbb{R}^n}(\delta^\nabla \dot{\delta}(0), \nu_p) = g_{\mathbb{R}^n}(II_p(v, v), \nu_p) = g(S_p \cdot v, v) \end{aligned}$$

und die letzte Größe ist positiv nach Voraussetzung.

Wenn S_p negativ definit ist, kann man eine ähnliche Aussage formulieren. Wenn $\dim M = 2$ haben wir also die folgenden zwei Fälle. Für $K > 0$ liegt $F(U)$ auf einer Seite der Ebene $\{g_{\mathbb{R}^n}(x, \nu_p) = g_{\mathbb{R}^3}(F(p), \nu_p)\}$. Für $K < 0$ besitzt $F(U)$ Punkte auf beiden Seiten der Ebene. \triangle

Beispiel* 6.29. Es sei F wie im obigen Beispiel und es sei angenommen, dass S_p positiv definit ist. Wir schreiben λ_1, λ_2 für die kleinsten Hauptkrümmungen. Nach der Gauß-Formel gilt

$$K(\Pi) = \det(P_\Pi \circ S_p|_\Pi)$$

für alle Ebenen $\Pi \subset T_p M$, wobei $P_\Pi : T_p M \rightarrow \Pi$ die orthogonale Projektion auf Π ist. Nach dem Satz von Courant–Fischer gilt

$$\det(P_\Pi \circ S_p|_\Pi) \geq \lambda_1 \lambda_2.$$

Also sind die Schnittkrümmungen in p von unten durch $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ beschränkt. \triangle

6.3 Ricci- und Skalar­krümmung

Wir werden sehen, dass der Krümmungstensor R viel über die Metrik g sagen kann. Für höhere dimensionale Mannigfaltigkeit ist aber schwierig den ganzen Krümmungstensor zu berechnen denn wir müssen seinen Wert auf $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ Quadrupel von Vektoren bestimmen. Es ist daher sinnvoll einfachere Tensoren aus R durch Verjüngung zu definieren. Wir hoffen dann, dass aus diesen neuen Tensoren noch wichtige Informationen hergeleitet werden können.

Definition 6.30. Die Ricci-Krümmung $\text{Ric} \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ einer PR-Mannigfaltigkeit ist das Feld von Bilinearformen, die als Spur von R im ersten und vierten Eintrag erhalten werden:

$$\text{Ric}(Y, Z) = \text{Spur}\left(X \mapsto R(X, Y)Z\right), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Wir schreiben $\text{Ric}^\sharp \in \Gamma(\text{End}(TM))$ für den Endomorphismus, der Ric bezüglich g darstellt

$$\text{Ric}(Y, Z) = g(\text{Ric}^\sharp \cdot Y, Z), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad \triangle$$

Satz 6.31. Die Ricci-Krümmung ist symmetrisch und, wenn e_1, \dots, e_n eine orthonormale Basis von T_pM für $p \in M$ ist, gilt

$$\text{Ric}_p(Y, Z) = \sum_{i=1}^{\sigma_+} R_p(e_i, Y, Z, e_i) - \sum_{i=\sigma_++1}^n R_p(e_i, Y, Z, e_i) \quad (6.10)$$

Beweis. Die Symmetrie folgt aus Formeln (6.10) und (6.4). Es sei nun $(R_j^i(\cdot, Y)Z)$ die Matrix, die $X \mapsto R(X, Y)Z$ bezüglich der Basis (e_i) darstellt. Also $R_j^i(\cdot, Y)Z = e^i(R(e_j, Y)Z)$ und

$$\begin{aligned} \text{Spur}\left(X \mapsto R(X, Y)Z\right) &= \sum_{i=1}^n R_i^i(\cdot, Y)Z = \sum_{i=1}^n e^i(R(e_i, Y)Z) \\ &= \sum_{i=1}^{\sigma_+} g(R(e_i, Y)Z, e_i) - \sum_{i=\sigma_++1}^n g(R(e_i, Y)Z, e_i), \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $e^i = g(\cdot, e_i)$ für $i = 1, \dots, \sigma_+$ und $e^i = -g(\cdot, e_i)$ für $i = \sigma_+ + 1, \dots, n$. \square

Dank der Symmetrien des Krümmungstensors ist Ric die einzige nicht triviale Verjüngung von R . Wir bekommen somit aus einem Tensor der Stufe 4 einen Tensor der Stufe 2. Wir können nun die Verjüngung von Ric^\sharp nehmen, um aus einem Tensor der Stufe 2 einen Tensor der Stufe 0, also einen Skalar, zu gewinnen.

Definition 6.32. Die Skalar­krümmung $\text{skal} : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Spur der Ricci-Krümmung

$$\text{skal} = \text{Spur}(\text{Ric}^\sharp). \quad \triangle$$

Aufgabe 6.33. Wenn e_1, \dots, e_n eine orthonormale Basis von $T_p M$ für $p \in M$ ist, gilt

$$\text{skal}(p) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\sigma_+} R(e_i, e_j, e_j, e_i) - 2 \sum_{i=1}^{\sigma_+} \sum_{j=\sigma_++1}^n R(e_i, e_j, e_j, e_i) + \sum_{\substack{i,j=\sigma_++1 \\ i \neq j}}^n R(e_i, e_j, e_j, e_i).$$

Falls g eine Riemannsche Metrik ist, dann bekommen wir

$$\text{skal}(p) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n R(e_i, e_j, e_j, e_i). \quad \triangle$$

Im nächsten Kapitel werden wir untersuchen, welche Informationen über die Metrik die Schnitt- Ricci- und Skalar Krümmung liefern. Diese Informationen werden durch obere oder untere Schranke von diesen Krümmungsgrößen gewonnen.

Definition 6.34. Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und c eine reelle Zahl. Wir sagen, dass die Schnittkrümmung von (M, g) größer als c ist und schreiben $K > c$, falls

$$K(\Pi) > c, \quad \forall p \in M, \Pi \subset T_p M,$$

wobei Π eine nicht ausgeartete Ebene bezüglich g ist. Auf ähnlicher Weise sagen wir, dass die Ricci-Krümmung größer als $c(n-1)g$ ist und schreiben $\text{Ric} > c(n-1)g$, falls

$$\text{Ric}_p(v, v) > c(n-1)g_p(v, v), \quad \forall p \in M, v \in T_p M$$

und dass die Skalar Krümmung größer als $cn(n-1)$ und schreiben $\text{skal} > cn(n-1)$, falls

$$\text{skal}(p) > cn(n-1), \quad \forall p \in M.$$

Ähnliche Definitionen gelten für $K \geq c$, $K < c$ und $K \leq c$ (bzw. $\text{Ric} \geq c(n-1)$, $\text{Ric} < c(n-1)$ und $\text{Ric} \leq c(n-1)$, oder $\text{skal} \geq cn(n-1)$, $\text{skal} < cn(n-1)$ und $\text{skal} \leq cn(n-1)$). \triangle

Bemerkung 6.35. Der Grund für den Faktor $n-1$ in der Ricci-Krümmung und den Faktor $n(n-1)$ in der Skalar Krümmung ist, dass die Implikationen

$$K > c \implies \text{Ric} > c(n-1) \implies \text{skal} > cn(n-1)$$

gelten (siehe auch Aufgabe 10-1). \triangle

Bemerkung 6.36. Man sagt, dass (M, g) eine Einstein-PR-Mannigfaltigkeit ist, wenn $\text{Ric} = c(n-1)g$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Für $\dim M = 2, 3$ kann man zeigen, dass diese Bedingung äquivalent zur $K = c$ ist. Aus dem Satz von Schur, den wir hier aus zeitlichen Gründen nicht beweisen können, haben wir auch das folgende Resultat: wenn $\dim M \geq 3$ und eine glatte Funktion $c : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{Ric} = c(n-1)g$ existiert, dann ist c konstant und daher (M, g) Einstein. Aus diesem Resultat folgt auch die letzte Aussage in Bemerkung 6.11. \triangle

6.4 Die Taylor-Entwicklung der Metrik in Normalkoordinaten

Aber welche Informationen können wir aus der Krümmung entnehmen? Wenn $(e_i = \partial_i)$ ein lokaler Rahmen ist, dessen Elemente die Koordinatenvektorfelder einer Karte sind, dann wird die Formel (6.1) zu

$$\Omega_k^l = \sum_{i',j'=1}^n \left(\partial_{i'} \omega_{j'k}^l + \sum_{m=1}^n \omega_{i'm}^l \omega_{j'k}^m \right) dx^{i'} \wedge dx^{j'},$$

wobei $\omega_j^k = \sum_{i=1}^n \omega_{ij}^k dx^i$. Daher gilt

$$R_{ijk}^l := \Omega_k^l(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \omega_{jk}^l - \partial_j \omega_{ik}^l + \sum_{m=1}^n \left(\omega_{im}^l \omega_{jk}^m - \omega_{jm}^l \omega_{ik}^m \right).$$

Wir wissen aber aus (4.10), dass die Christoffelsymbole (ω_{ij}^k) als Funktion der Zahlen (g_{ij}) und ihrer erster Ableitung geschrieben werden können. Deshalb sind die Zahlen (R_{ijk}^l) eine Funktion von $(g_{ij})_{i,j}$ und ihrer erster und zweiter Ableitung. Zum Beispiel wenn wir Normalkoordinaten um $p \in M$ nehmen, finden wir mittels Satz 4.32

$$R_{ijkl}(p) = \partial_i \omega_{jk}^l(p) - \partial_j \omega_{ik}^l(p) = \frac{1}{2} \left(\partial_{ik}^2 g_{jl}(p) - \partial_{jk}^2 g_{il}(p) + \partial_{jl}^2 g_{ik}(p) - \partial_{il}^2 g_{jk}(p) \right),$$

wobei $R_{ijkl}(p) := R_p(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$. Wenn man die Symmetrien der Krümmung, der Christoffelsymbole und der Metrik berücksichtigt (siehe Aufgaben 6.37, 6.38 und 6.39), kann man umgekehrt die zweite Ableitung von g in p in Normalkoordinaten als Funktion von R schreiben:

$$\partial_{il}^2 g_{jk}(p) = -\frac{1}{3} (R_{ijkl}(p) + R_{ikjl}(p)). \quad (6.11)$$

Deswegen gewinnen wir die Taylor-Entwicklung von g_{jk} in Normalkoordinaten zur zweiten Ordnung

$$g_{jk}(x) = \delta_{jk}^{(\sigma_+, \sigma_-)} - \frac{1}{3} \sum_{i,l} R_{ijkl}(p) x^i x^l + o(|x|^2), \quad (6.12)$$

welche auch als

$$g_v^p(u_1, u_2) = g_p(u_1, u_2) - \frac{1}{3} R_p(v, u_1, u_2, v) + o(|v|^2 |u_1| |u_2|), \quad \forall v, u_1, u_2 \in T_p M$$

geschrieben werden kann, wobei $g^p = \exp_p^* g$ die zurückgezogene Metrik ist.

Wenn zum Beispiel g eine Riemannsche Metrik ist, $v \in S_r^{T_p M}$ und $u \in T_v S_r^{T_p M}$, dann gewinnen wir

$$|u|_{g_v^p} = |u|_{g_p} \left(1 - \frac{r^2}{6} K(\Pi_{uv}) + o(r^2) \right),$$

wobei Π_{uv} die von u und v aufgespannte Ebene darstellt. Wir sehen daher, dass das Vorzeichen der Schnittkrümmung die induzierte Metrik auf der geodätischen Sphäre $S_r(p)$

von Radius r bis auf Terme der zweiten Ordnung in r beeinflusst. Je kleiner die Schnittkrümmung ist, desto größer ist der Abstand zwischen Punkten auf der Sphäre von Radius r . Anders gesagt breitet negative Schnittkrümmung die Geodätischen durch p aus, während positive Krümmung sie näher hält.

Auf ähnlicher Weise werden wir im Aufgabenblatt 10 sehen, dass die Ricci-Krümmung $\text{Ric}_p(v, v)$ das Volumen eines kleinen Kegels mit Scheitel in p und Richtung v beeinflusst und die Skalar­krümmung $\text{skal}(p)$ das Volumen von geodätischen Bällen beeinflusst.

Bis hierher haben wir nur gesehen, dass die Krümmung das lokale Verhalten der Metrik prägt. Im nächsten Kapitel fangen wir aber an zu sehen, dass die Krümmung auch das globale Verhalten der Metrik beeinflusst. Der Übergang von lokalen zu globalen Eigenschaften wird durch bestimmte Integrationsverfahren erledigt (siehe den Satz von Gauß–Bonnet oder die zweite Variation der Länge). Man kann Beispiele von solchen Übergängen schon in Analysis I finden. Man nehme dafür eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn $\frac{df}{dx} > 0$ (lokale Eigenschaft) gilt, ist f monoton steigend (globale Eigenschaft). Wenn $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$ (lokale Eigenschaft) gilt, ist f konvex (globale Eigenschaft).

Aufgabe 6.37. Es sei (U, φ) eine Karte. Wir setzen

$$\omega_{ijk} := \frac{1}{2} \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij} \right) \quad \forall i, j, k,$$

wobei $g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$. Zeigen Sie, dass

$$\partial_i g_{jk} = \omega_{ijk} + \omega_{ikj}. \quad (6.13)$$

und dass

$$\partial_l \omega_{ijk} = \partial_k \omega_{ijl}. \quad (6.14)$$

△

Aufgabe 6.38. Es seien (U, φ) Normalkoordinaten um $p \in M$. Zeigen Sie, dass

$$\omega_{ij}^k(p) = \omega_{ijk}(p), \quad \partial_l \omega_{ij}^k(p) = \partial_l \omega_{ijk}(p), \quad \forall i, j, k, l, \quad (6.15)$$

dass

$$\partial_i \omega_{ljk}(p) + \partial_j \omega_{lik}(p) + \partial_l \omega_{ijl}(p) = 0, \quad \forall i, j, k, l \quad (6.16)$$

und dass

$$\partial_{il}^2 g_{jk}(p) = \partial_k \omega_{ijl} + \partial_j \omega_{ikl} = -\partial_i \omega_{jkl}. \quad (6.17)$$

Hinweis: Für (6.15) benutzen Sie (d) im Satz (4.32). Für (6.16) benutzen Sie, dass

$$\sum_{i,j} \omega_{ij}^k(t x) x^i x^j = 0 \quad \forall k$$

gilt denn die Kurve $t \mapsto tx$ ist eine Geodätische in Normalkoordinaten. Nehmen Sie dann die Ableitung für $t = 0$ und finden Sie, dass das Polynom $\sum_{i,j,l} \partial_l \omega_{ij}^k(p) x^i x^j x^l$ verschwindet. Bestimmen dann die Koeffizienten dieses Polynoms. Für (6.17) benutzen Sie (6.13) und (6.16). △

Aufgabe 6.39. Es seien (U, φ) Normalkoordinaten um $p \in M$. Zeigen Sie, dass

$$R_{ijkl}(p) + R_{ikjl}(p) = \partial_i \omega_{jkl}(p) + \partial_i \omega_{kjl}(p) - \partial_j \omega_{ikl}(p) - \partial_k \omega_{ijl}(p) = 3\partial_i \omega_{jkl}(p)$$

und folgern Sie daraus Formel (6.11). △

7 Der Satz von Gauß–Bonnet

7.1 Die infinitesimale Version des Satzes von Gauß–Bonnet

Wir studieren zuerst die Verbindung zwischen Krümmung und Topologie für orientierte Riemannsche Flächen (M, g) . Wenn e_1, e_2 ein lokaler, positiver, orthonormaler Rahmen ist, dann

$$\omega = \omega_1^2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

und

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = d\omega_1^2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\Omega_2^1 = -d\omega_1^2$ und

$$\Omega_2^1(e_1, e_2) = e^1(R(e_1, e_2)e_2) = R(e_1, e_2, e_2, e_1) = K,$$

wobei $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Gauß-Krümmung ist. Daher gilt $\Omega_2^1 = K \text{vol}_g$ und wir haben das folgende Resultat bewiesen.

Satz 7.1. *Es sei (M, g) eine orientierte, Riemannsche Fläche und e_1, e_2 ein positiver, orthonormaler Rahmen auf einer offenen Menge $U \subset M$. Dann*

$$K \text{vol}_g + d(g(\nabla e_1, e_2)) = 0 \quad \text{auf } U. \quad (7.2)$$

Wenn wir die Gleichung (7.2) auf einer zwei-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $N \subset U$ mit Rand integrieren, finden wir nach dem Satz von Stokes heraus, dass das Integral der Gauß-Krümmung einem Integral auf dem Rand von N gleicht. Wir wollen daher das Pullback der 1-Form $g(\nabla e_1, e_2)$ durch eine immersierte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ besser verstehen.

Zu diesem Zweck betrachten wir den Bündelisomorphismus

$$j : TM \rightarrow TM,$$

der die Vektoren um neunzig Grad dreht. Dieser Isomorphismus stellt die 2-Form vol_g bezüglich der nicht ausgearteten Bilinearform g dar:

$$\text{vol}_g(v_1, v_2) = g(j \cdot v_1, v_2), \quad \forall p \in M, v_1, v_2 \in T_p M.$$

Anders gesagt, wenn $v \in T_p M \setminus \{0\}$, dann ist $j \cdot v \in T_p M$ eindeutig definiert durch die Eigenschaften

$$|j \cdot v|_{g_p} = |v|_{g_p}, \quad g_p(j \cdot v, v) = 0, \quad (v, j \cdot v) \text{ positive Basis.}$$

Der Bündelisomorphismus j wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich eines lokalen, positiven, orthonormalen Rahmens e_1, e_2 dargestellt. Insbesondere

$$\omega = g(\nabla e_1, e_2) \otimes j. \quad (7.3)$$

Hilfssatz 7.2. *Der Bündelisomorphismus j ist parallel: $\nabla j = 0$. Anders gesagt*

$$\nabla_X(j \cdot Y) = j \cdot \nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Beweis. Es sei ω die Matrix der Zusammenhangsformen bezüglich eines positiven, orthonormalen Rahmens auf U und seien $(Y^1, Y^2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koeffizienten von Y bezüglich dieses Rahmens. Dann

$$\begin{aligned} \nabla_X(j \cdot Y) &= \nabla_X \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dY^1(X) \\ dY^2(X) \end{pmatrix} + \omega_1^2(X) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} dY^1(X) \\ dY^2(X) \end{pmatrix} + \omega_1^2(X) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} \right] \\ &= j \cdot \nabla_X Y. \quad \square \end{aligned}$$

Wir können nun j benutzen, um die extrinsische Krümmung (den Formoperator S) einer Immersion $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ zu messen. Wir parametrisieren γ nach Bogenlänge, sodass $j \cdot \dot{\gamma}$ der normierte Normalenvektor zu γ ist. Dann $-\gamma \nabla_{\partial_t}(j \cdot \dot{\gamma}(t)) \in \mathbb{R} \cdot \dot{\gamma}(t)$ und wir geben die folgenden Definition.

Definition 7.3. Die geodätische Krümmung $\kappa_\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ einer Immersion $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, die nach Bogenlänge parametrisiert wird, ist gegeben als

$$S \cdot \partial_t = -d\gamma^{-1} \cdot \gamma \nabla_{\partial_t}(j \cdot \dot{\gamma}(t)) = \kappa_\gamma(t) \partial_t.$$

Nach Hilfssatz 7.2 gilt auch

$$\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = \kappa_\gamma j \cdot \dot{\gamma} \quad \text{und daher} \quad \kappa_\gamma = g(\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma}, j \cdot \dot{\gamma}). \quad (7.4)$$

△

Bemerkung 7.4. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ parametrisiert nach der Bogenlänge und sei $\bar{\gamma} : [-b, -a] \rightarrow M$ die Kurve mit inverser Parametrisierung, $\bar{\gamma}(t) = \gamma(-t)$. Nach Hilfssatz 4.24 gilt

$$\kappa_{\bar{\gamma}}(t) = -\kappa_\gamma(-t), \quad \forall t \in [-a, -b]. \quad \triangle$$

Aufgabe 7.5. Es sei $M = (\theta_0, \theta_1) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und $g = d\theta^2 + r^2(\theta, \phi)d\phi^2$. Für ein festes $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$ betrachten wir die immersierte Kurve $\gamma_\theta : \mathbb{R} \rightarrow M$ gegeben als $\gamma_\theta(\phi) = (\theta, \phi)$. Zeigen Sie, dass

$$\kappa_{\gamma_\theta}(\phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, \phi). \quad \triangle$$

Um das Pullback $g(\nabla e_1, e_2)$ durch eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ zu berechnen, müssen wir auch die Winkelfunktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten, die durch die Gleichung

$$\dot{\gamma}(t) = \cos \theta(t) e_1(\gamma(t)) + \sin \theta(t) e_2(\gamma(t)), \quad \forall t \in [a, b]$$

bis auf ein Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt ist. Insbesondere ist die gesamte Winkeländerung des Tangentialvektors $\dot{\gamma}$ bezüglich e_1, e_2

$$\Delta\theta(\gamma) := \theta(b) - \theta(a) \in \mathbb{R} \quad (7.5)$$

wohldefiniert.

Satz 7.6. Es sei e_1, e_2 ein positiver, orthonormaler Rahmen auf U und $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$ eine Immersion. Es gilt die Formel

$$\gamma^*(g(\nabla e_1, e_2)) = \kappa_\gamma \text{vol}_{\gamma^*g} - d\theta. \quad (7.6)$$

Beweis. Wir parametrisieren γ nach Bogenlänge. Dann erfüllt die Funktion θ die Gleichung

$$\dot{\gamma}(t) = \cos \theta(t) e_1(\gamma(t)) + \sin \theta(t) j \cdot e_1(\gamma(t)).$$

Nach Definition der Pullback-Ableitung und der Gleichung (7.1) gilt

$$\begin{aligned} \gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} &= \dot{\theta} \cdot \left(-\sin \theta e_1(\gamma) + \cos \theta j \cdot e_1(\gamma) \right) + g(\nabla_{\dot{\gamma}} e_1(\gamma), e_2(\gamma)) j \cdot \dot{\gamma} \\ &= \left(\dot{\theta} + g(\nabla_{\dot{\gamma}} e_1(\gamma), e_2(\gamma)) \right) j \cdot \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Nach Gleichung (7.4) finden wir

$$\kappa_\gamma = \dot{\theta} + g(\nabla_{\dot{\gamma}} e_1(\gamma), e_2(\gamma)).$$

Das ist genau Gleichung (7.6) ausgewertet auf ∂_t . □

Wir können nun den Satz von Stokes in Zusammenhang mit Formeln (7.2) und (7.6) benutzen.

Folgerung 7.7. Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Fläche und e_1, e_2 ein positiver, orthonormaler Rahmen auf einer offenen Menge U . Wenn $N \subset U$ eine zwei-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand ist, dann gilt

$$\int_N K_N \text{vol}_N + \int_{\partial N} \kappa_{\partial N} \text{vol}_{\partial N} = \sum_{i=1}^m \Delta\theta(\gamma_i), \quad (7.7)$$

wobei

- $K_N : N \rightarrow \mathbb{R}$ die Gauß-Krümmung und $\text{vol}_N = \text{vol}_g$ die Volumenform von (N, g) darstellt;
- $\kappa_{\partial N} : \partial N \rightarrow \mathbb{R}$ die geodätische Krümmung des Randes $\iota : \partial N \rightarrow N$ und $\text{vol}_{\partial N} = \text{vol}_{\iota^*g}$ die induzierte Volumenform darstellt;
- $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \partial N$ immensierte Kurven mit $\gamma_i(a_i) = \gamma_i(b_i)$ sind, welche die Zusammenhangskomponenten des Randes ∂N gemäß der durch (5.16) gegebenen Orientierung parametrisieren.

Bemerkung 7.8. Jedes $\Delta\theta(\gamma_i)$ ist ein Vielfaches von 2π , da $\dot{\gamma}_i(a_i) = \dot{\gamma}_i(b_i)$. Also existiert eine ganze Zahl $\chi \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\sum_{i=1}^m \Delta\theta(\gamma_i) = 2\pi\chi. \quad \triangle$$

Bemerkung* 7.9. (nicht klausurrelevant) Es sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Fläche ohne Rand und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit der Eigenschaft, dass $Z_X := \{p \in M \mid X(p) = 0\}$ eine endliche Menge ist. Wir haben einen positiven orthonormalen Rahmen

$$e_1 := \frac{X}{|X|}, \quad e_2 = J \cdot e_1$$

auf $M \setminus Z_X$. Für $\epsilon > 0$ klein genug definieren wir

$$M_\epsilon := M \setminus \bigcup_{p \in Z_X} B_\epsilon(p),$$

wobei $B_\epsilon(p)$ der geodätische Ball mit Radius ϵ um $p \in M$ ist. Für ϵ klein sind diese endlich viele Bälle disjunkt und M_ϵ ist eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Es sei nun $p \in Z_X$ und man betrachte Normalkoordinaten (x, y) und normale Polarkoordinaten (θ, ϕ) um p , sodass $g = d\theta^2 + r^2 d\phi^2$. Die Kurve $\gamma_{p,\epsilon} : [0, 2\pi] \rightarrow M$, die in Polarkoordinaten als $\gamma_{p,\epsilon}(t) = (\epsilon, t)$ gegeben ist, parametrisiert der Rand von $B_\epsilon(p)$ in die positive Richtung. Wir haben

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(p)} \kappa_{\partial B_\epsilon(p)} \text{vol}_{\partial B_\epsilon(p)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} r(\epsilon, \phi) d\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{\partial r}{\partial \theta}(\epsilon, \phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial r}{\partial \theta}(\epsilon, \phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 1 d\phi \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

wobei wir Aufgabe 7.5 und die Tatsache, dass $\frac{\partial r}{\partial \theta}(0, \phi) = 1$ (siehe Bemerkung 4.40), benutzt haben.

Wir wenden Gleichung (7.7) auf M_ϵ an und nehmen den Limes für $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \int_M K_M \text{vol}_M &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{M_\epsilon} K_{M_\epsilon} \text{vol}_{M_\epsilon} + \int_{\partial M_\epsilon} \kappa_{\partial M_\epsilon} \text{vol}_{\partial M_\epsilon} - \int_{\partial M_\epsilon} \kappa_{\partial M_\epsilon} \text{vol}_{\partial M_\epsilon} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{p \in Z_X} \left(\Delta\theta(\gamma_{p,\epsilon}) - \int_{\partial B_\epsilon(p)} \kappa_{\partial B_\epsilon(p)} \text{vol}_{\partial B_\epsilon(p)} \right) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{p \in Z_X} \left(\Delta\theta(\gamma_{p,\epsilon}) - 2\pi \right) \right]. \end{aligned}$$

Da $\Delta\theta(\gamma_{p,\epsilon}) - 2\pi$ stetig in ϵ und ein Vielfaches von 2π ist, sehen wir dass es nicht von ϵ abhängt. Wir definieren dann den Index von X in $p \in Z_X$ durch

$$\text{ind}_p X := \frac{1}{2\pi} \Delta\theta(\gamma_{p,\epsilon}) - 1 \in \mathbb{Z}$$

und wir bekommen

$$\int_M K_M \text{vol}_M = 2\pi \sum_{p \in Z_X} \text{ind}_p X.$$

Wir erwähnen ohne Beweis eine äquivalente und besser berechenbare Definition von $\text{ind}_p X$, die nicht von g abhängt. Es sei $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Karte mit $\mathbf{x}(p) = 0$. Wir betrachten für beliebiges $r > 0$ die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(\phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$, die einmal um 0 umkreist. Dann existiert $\theta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\frac{X \circ \gamma(\phi)}{|X \circ \gamma(\phi)|} = \cos \theta(\phi) \partial_{x^1}|_{\gamma(\phi)} + \sin \theta(\phi) \partial_{x^2}|_{\gamma(\phi)},$$

wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm bezeichnet. Dann

$$\text{ind}_p X = \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi}.$$

Mit dieser Definition sieht man leicht, dass, wenn in der Karte das Vektorfeld X die Gestalt $X(z) = z^k$ in komplexer Notation für $k \geq 0$ besitzt, dann $\text{ind}_p X = k$ gilt. Auf ähnlicher Weise $\text{ind}_p X = -k$, wenn $X(z) = \bar{z}^k$. △

7.2 Orientierte Flächen mit Rand und Ecken

Zwei Dinge sind nicht so befriedigend an Folgerung 7.7. Erstens muss N in einer offenen Menge U enthalten sein, auf der ein positiver, orthonormaler Rahmen existiert. Zweitens wissen wir, dass die rechte Seite ein Vielfaches von 2π ist aber wir wissen nicht, wie wir dieses Vielfache berechnen können.

Diese Probleme werden gelöst, indem wir die Fläche M in einfache Teile M_1, \dots, M_k mit $M_i \subset U_i$ zerlegen, wobei U_i der Definitionsbereich einer Karte ist, der diffeomorph zu \mathbb{R}^2 ist. „Einfach“ heißt hier, dass M_i homöomorph zur abgeschlossenen Scheibe D^2 ist.

Dann werden wir auf jedem Teil Folgerung 7.7 anwenden und der Umlaufsatz von Hopf, den wir aus zeitlichen Gründen nicht beweisen können, berechnet für uns die rechte Seite von (7.7) in diesem Fall. Die Schwierigkeit ist hier, dass die Teile M_i nicht nur einen Rand sondern zwangsläufig auch Ecken auf dem Rand besitzen (also ist der Rand singular in gewissen Punkten).

Definition 7.10. Eine kompakte, orientierte Fläche M mit Rand ∂M und Ecken \mathcal{E}_M ist ein kompakter, topologischer Raum (Hausdorffsch und mit abzählbarer Basis), sodass M von paarweise verträglichen, gleich orientierten Karten $\varphi : U \rightarrow V$ bedeckt ist, sodass V eins zwischen \mathbb{R}^2 , \mathbb{H}^2 , $\mathbb{E}_{\text{konvex}}^2$ und $\mathbb{E}_{\text{konkav}}^2$ ist, wobei

$$\mathbb{E}_{\text{konvex}}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ und } y \geq 0\}, \quad \mathbb{E}_{\text{konkav}}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ oder } y \leq 0\}.$$

Der Rand $\partial M \subset M$ ist die Menge der Punkte $p \in M$, sodass $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^2, \partial\mathbb{E}_{\text{konvex}}^2, \partial\mathbb{E}_{\text{konkav}}^2$, wobei

$$\partial\mathbb{E}_{\text{konvex}}^2 = \{x = 0, y \geq 0\} \cup \{x \geq 0, y = 0\} = \partial\mathbb{E}_{\text{konkav}}^2.$$

Die Menge der Ecken $\mathcal{E}_M \subset \partial M$ ist eine beliebige endliche Teilmenge von ∂M , welche die Punkten $p \in M$ mit $\varphi(p) \in \mathcal{E}_{\mathbb{E}_{\text{konvex}}^2}, \mathcal{E}_{\mathbb{E}_{\text{konkav}}^2}$ enthält, wobei $\mathcal{E}_{\mathbb{E}_{\text{konvex}}^2} = \{(0, 0)\} = \mathcal{E}_{\mathbb{E}_{\text{konkav}}^2}$.

Eine Kante von M ist der Abschluß einer Zusammenhangskomponente von $\partial M \setminus \mathcal{E}_M$, die diffeomorph zu Intervallen sind. Wir schreiben \mathcal{K}_M für die Menge der Kanten. \triangle

Wir wollen nun eine orientierte, kompakte Fläche mit Rand und Ecken in einfachen Teilen zerlegen.

Definition 7.11. Eine Zerlegung $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_k\}$ einer kompakten, orientierten Fläche M mit Rand ∂M und Ecken \mathcal{E}_M ist eine Familie orientierter Subflächen mit Rand und Ecken, sodass

- (a) $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$;
- (b) für alle $1 \leq i, j \leq k$ ist $M_i \cap M_j$ entweder leer oder eine gemeinsame Kante zwischen M_i und M_j oder eine gemeinsame Ecke;
- (c) für alle $1 \leq i \leq k$ ist $M_i \cap \partial M$ entweder leer oder eine gemeinsame Kante oder eine gemeinsame Ecke zwischen M_i und M .

Wir schreiben $\mathcal{K} := \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ für die Menge aller Kanten der Flächen in der Zerlegung und $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ für die Menge aller Ecken der Flächen in der Zerlegung. Genauer ist \mathcal{K}_{out} die Menge der Kanten, die im Rand von M enthalten sind und $\mathcal{K}_{\text{in}} := \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_{\text{out}}$. Auf ähnlicher Weise ist \mathcal{E}_{out} die Menge der Ecken, die im Rand von M enthalten sind und $\mathcal{E}_{\text{in}} := \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\text{out}}$. \triangle

Bemerkung 7.12. Es sei \mathcal{F} eine beliebige Zerlegung von M . Dann gilt:

- (i) Die Anzahl der Kanten auf dem Rand ist gleich der Anzahl der Ecken auf dem Rand:

$$|\mathcal{K}_{\text{out}}| = |\mathcal{E}_{\text{out}}|. \tag{7.8}$$

\triangle

- (ii) Eine Kante in \mathcal{K}_{in} gehört genau zu zwei Subflächen M_i und M_j , die auf der Kante entgegengesetzte Orientierungen induzieren denn sie besitzen entgegengesetzte äußere Normalenvektorfelder auf der Kante.
- (iii) Eine Kante in \mathcal{K}_{out} gehört genau zu einer Subfläche M_i der Zerlegung. Die Fläche M_i und M induzieren auf der Kante die selbe Orientierung denn sie teilen dasselbe äußere Normalenvektorfeld entlang der Kante.

Wir wollen nun Zerlegungen betrachten, bei denen die Subflächen am einfachsten sind.

Definition 7.13. Ein orientiertes m -Eck M ist eine orientierte Fläche mit Rand ∂M und Ecken \mathcal{E}_M , sodass M homöomorph zu der abgeschlossenen Scheibe D^2 ist und \mathcal{E}_M genau m Punkte besitzt. \triangle

Definition 7.14. Eine Triangulierung einer Fläche mit Rand und Ecken ist eine Zerlegung, die aus 3-Ecken besteht. Die Euler-Charakteristik von M ist definiert als

$$\chi(M) = |\mathcal{F}| - |\mathcal{K}| + |\mathcal{E}| \in \mathbb{Z},$$

wobei \mathcal{F} eine beliebige Triangulierung von M ist und $|\cdot|$ die Kardinalität einer Menge bezeichnet. \triangle

Bemerkung 7.15. Es sei \mathcal{T} eine Zerlegung von M , sodass M_i ein m_i -Eck ist. Dann gilt auch in diesem Fall $\chi(M) = |\mathcal{F}| - |\mathcal{K}| + |\mathcal{E}|$ denn wir können jedes M_i in 3-Ecke triangulieren um eine Triangulierung \mathcal{F}' von M zu gewinnen, sodass

$$|\mathcal{F}'| - |\mathcal{F}| = |\mathcal{K}'| - |\mathcal{K}|, \quad |\mathcal{E}'| = |\mathcal{E}|. \quad \triangle$$

Bemerkung 7.16. Es sei $m \geq 1$ und \mathcal{F} eine Zerlegung von M , die aus m -Ecken besteht. Dann gilt (warum?)

$$2|\mathcal{K}_{\text{in}}| + |\mathcal{K}_{\text{out}}| = m|\mathcal{F}|. \quad (7.9)$$

\triangle

Wir haben den folgenden wichtigen und schwierigen Satz über Triangulierungen, den wir aus zeitlichen Gründen nicht beweisen können.

Satz 7.17. *Es sei M eine kompakte, orientierte Fläche mit Rand ∂M und Ecken \mathcal{E}_M und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M . Bis auf das Hinzufügen von zusätzlichen Ecken besitzt M eine Triangulierung, sodass jedes 3-Eck in einer offenen Menge der Überdeckung \mathcal{U} enthalten ist. Die Euler-Charakteristik von M hängt nicht von der Triangulierung und der Menge der Ecken \mathcal{E}_M ab. Wenn M' eine weitere kompakte orientierte Fläche mit Rand ist, die homöomorph zu M ist, dann $\chi(M) = \chi(M')$. \square*

Aufgabe 7.18. Finden Sie explizite Triangulierungen für die Flächen mit Rand

$$\bar{B}^2, \quad S^2, \quad [0, 1] \times S^1, \quad \mathbb{T}^2, \quad \bar{B}^2 \setminus (B_{1/4}^2(-1/2) \cup B_{1/4}^2(1/2)).$$

Benutzen Sie diese Triangulierungen, um die Euler-Charakteristik dieser Flächen zu berechnen. \triangle

7.3 Die globale Version des Satzes von Gauß–Bonnet

Es sei M eine orientierte Fläche mit Rand und Ecken und sei g eine Riemannsche Metrik auf M . Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise glatte Immersion $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ mit $|\dot{\gamma}| = 1$ und $\gamma(a) = \gamma(b)$. Es seien $a = t_1 < \dots < t_k = b$ Zeiten, sodass $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ für alle $j = 1, \dots, k-1$ glatt ist. Für jedes t_j existiert der Links- und der Rechtstangentenvektor

$$\dot{\gamma}_i^-(t_j) := \lim_{t' \uparrow t_j} \dot{\gamma}_i(t'), \quad \dot{\gamma}_i^+(t_j) := \lim_{t' \downarrow t_j} \dot{\gamma}_i(t').$$

Da $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt, ergibt Sinn den Linkstangentenvektor an $t_1 = a$ als $\dot{\gamma}^-(a) := \dot{\gamma}^-(b)$ zu definieren. Auf ähnlicher Weise setzen wir $\dot{\gamma}^+(b) := \dot{\gamma}^+(a)$.

Wir setzen nun voraus, dass

$$\dot{\gamma}^-(t_j) \neq \dot{\gamma}^+(t_j), \quad \forall j = 1, \dots, k. \quad (7.10)$$

Definition 7.19. Der äußere Winkel $\theta_p \in (-\pi, \pi)$ in $p = \gamma(t_j)$ ist durch die Gleichung

$$\dot{\gamma}^+(t_j) = \cos \theta_p \dot{\gamma}^-(t_j) + \sin \theta_p J \dot{\gamma}^-(t_j)$$

gegeben (θ_p existiert nach Voraussetzung (7.10)). Der innere Winkel $\alpha_p \in (0, 2\pi)$ in p ist dann als

$$\alpha_p := \pi - \theta_p$$

gegeben. △

Bemerkung 7.20. Wenn γ eine Zusammenhangskomponente des Randes einer kompakten, orientierten Fläche N mit Rand und Ecken ist, genügt γ der Voraussetzung (7.10). Es sei $p := \gamma(t_j)$. Wenn $\varphi(p) = (0, 0)$ für eine Karte $U \rightarrow \mathbb{E}_{\text{konvex}}^2$ ist, dann $\dot{\gamma}_i^-(t_j) = -c_1 \partial_y$ für $c_1 > 0$ und $\dot{\gamma}_i^+(t_j) = c_2 \partial_x$ für $c_2 > 0$. Also bilden die zwei Vektoren eine positiv orientierte Basis. In diesem Fall folgt auch $\theta_p \in (0, \pi)$. Wenn $\varphi(p) = (0, 0)$ für eine Karte $U \rightarrow \mathbb{E}_{\text{konkav}}^2$, dann $\dot{\gamma}_i^-(t_j) = -c_1 \partial_x$ für $c_1 > 0$ und $\dot{\gamma}_i^+(t_j) = c_2 \partial_y$ für $c_2 > 0$. Also bilden die zwei Vektoren eine negativ orientierte Basis. In diesem Fall gilt $\theta_p \in (-\pi, 0)$. In den anderen Fällen ist $\dot{\gamma}_i^-(t_j) = \dot{\gamma}_i^+(t_j)$ und daher $\theta_p = 0$. △

Es sei nun angenommen, dass $\gamma([a, b])$ in einer offenen Menge U enthalten ist und dass ein positiver, orthonormaler Rahmen e_1, e_2 auf U existiert. Wir erweitern die Definition der Winkeländerung (7.5) bezüglich e_1, e_2 als

$$\Delta\theta(\gamma) := \sum_{j=1}^{k-1} \left[\Delta\theta(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} + \theta_{\gamma(t_{j+1})} \right] \in 2\pi\mathbb{Z},$$

wobei $\Delta\theta(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]})$ in (7.5) definiert wurde.

Aufgabe 7.21. Beweisen Sie, dass $\Delta\theta(\gamma)$ ein Vielfaches von 2π ist. Hinweis: wir definieren die Winkel ξ_0, \dots, ξ_{k-1} wie folgt. Der Winkel ξ_0 ist durch die Gleichung

$$\dot{\gamma}^+(a) = (\cos \xi_0) e_1 \circ \gamma + (\sin \xi_0) e_2 \circ \gamma$$

gegeben. Die Winkel ξ_ℓ für $\ell > 0$ sind durch die Gleichung

$$\xi_\ell := \sum_{j=1}^{\ell} \left[\Delta\theta(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} + \theta_{\gamma(t_{j+1})} \right]$$

gegeben, sodass $\xi_{k-1} = \Delta\theta(\gamma)$. Zeigen Sie per Induktion, dass

$$\dot{\gamma}^+(t_\ell) = \cos(\xi_\ell + \xi_0)e_1 \circ \gamma + \sin(\xi_\ell + \xi_0)e_2 \circ \gamma. \quad (7.11)$$

Aus der Gleichung (7.11) für $\ell = k$ und aus $\dot{\gamma}^+(b) = \dot{\gamma}_i^+(a)$ leiten Sie die gewünschte Aussage her. \triangle

Wir können nun die Winkeländerung auf dem Rand von kleinen m -Ecken durch einen berühmten Satz von Hopf berechnen.

Satz 7.22 (Umlaufsatz von Heinz Hopf). *Es sei (M, g) eine orientierte Fläche mit Rand und Ecken, die mit einer Riemannschen Metrik g versehen wird. Es sei N ein m -Eck, sodass $N \subset U$, wobei $(x^1, x^2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Karte ist. Wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial N$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes von M ist, gilt dann*

$$\Delta\theta(\gamma) = 2\pi$$

bezüglich des positiven, orthonormalen Rahmens $e_1 = \frac{1}{|\partial x^1|} \partial_{x^1}$, $e_2 = j e_1$.

Da der Satz von Stokes auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand und Ecken gilt, können wir den Satz von Gauß–Bonnet für m -Ecke, die in einer Karte mit $V = \mathbb{R}^2$ enthalten sind, mit Hilfe des Umlaufsatzes beweisen.

Folgerung 7.23. *Es sei (M, g) eine kompakte orientierte Fläche mit Rand und Ecken, die mit einer Riemannschen Metrik g versehen ist. Es sei N ein m -Eck, sodass $N \subset U$, wobei $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Karte ist. Dann gilt*

$$\int_N K_N \text{vol}_N + \int_{\partial N} \kappa_{\partial N} \text{vol}_{\partial N} + \sum_{p \in \mathcal{E}_N} \theta_p = 2\pi. \quad (7.12)$$

Beweis. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial M$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes und nehmen wir eine Zerlegung $a = t_1, \dots, t_k = b$, sodass $\{\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{k-1})\} = \mathcal{E}_N$. Hier haben wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass $\mathcal{E}_N \neq \emptyset$ und dass $\gamma(a) = \gamma(b) \in \mathcal{E}_N$. Wie in Folgerung 7.7 integrieren wir Formel (7.2) und benutzen (7.6), um

$$\int_N K_N \text{vol}_N + \int_{\partial N} \kappa_{\partial N} \text{vol}_{\partial N} = \int_{\partial N} d\theta$$

zu bekommen. Dann

$$\int_{\partial N} d\theta = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{d\theta}{dt} dt = \sum_{j=1}^{k-1} \Delta\theta(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}) = \Delta\theta(\gamma) - \sum_{j=1}^{k-1} \theta_{\gamma(t_j)} = 2\pi - \sum_{p \in \mathcal{E}_N} \theta_p. \quad \square$$

Wir können nun den globalen Satz von Gauß–Bonnet beweisen.

Satz 7.24. *Es sei M eine kompakte, orientierte Fläche mit Rand und Ecken \mathcal{E}_M und sei g eine Riemannsche Metrik auf M . Es gilt*

$$\int_M K_M \text{vol}_M + \int_{\partial M} \kappa_{\partial M} \text{vol}_{\partial M} + \sum_{p \in \mathcal{E}_M} \theta_p = 2\pi \chi(M). \quad (7.13)$$

Beweis. Es sei \mathcal{U} eine Überdeckung von M , sodass für jedes $U \in \mathcal{U}$ eine Karte $\varphi : U \rightarrow V$ existiert, wobei V eins der folgenden ist: $\mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{E}_{\text{konvex}}^2, \mathbb{E}_{\text{konkav}}^2$. Es sei $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_{|\mathcal{F}|}\}$ eine Triangulierung, sodass jedes 3-Eck in einem Element von \mathcal{U} enthalten ist. Wir wenden Folgerung 7.23 auf jedes M_j und finden

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{F}|} \int_{M_j} K_{M_j} \text{vol}_{M_j} + \sum_{j=1}^{|\mathcal{F}|} \int_{\partial M_j} \kappa_{\partial M_j} \text{vol}_{\partial M_j} + \sum_{j=1}^{|\mathcal{F}|} \sum_{p \in \mathcal{E}_{M_j}} \theta_p^{(j)} = 2\pi |\mathcal{F}|, \quad (7.14)$$

wobei $\theta_p^{(j)}$ der äußere Winkel in p für die Subfläche M_j ist. Die erste Summe gibt

$$\int_M K_M \text{vol}_M$$

nach Bemerkung 5.36.

Für die zweite Summe benutzen wir Bemerkung 7.12.(ii) wie folgt. Jedes Element der zweiten Summe ist das Integral der geodätischen Krümmung auf der drei Kanten von M_j . Wenn eine Kante zu \mathcal{K}_{in} gehört, dann existiert genau ein anderes 3-Eck M_j , sodass die Kante auch auf M_j liegt. Da die zwei induzierte Orientierungen inverse zueinander sind, kürzen sich die entsprechenden zwei Beiträge zur zweiten Summe nach Bemerkung 7.4 raus. Wenn eine Kante zu \mathcal{K}_{out} gehört, dann erscheint sie in der Summe genau einmal und liefert das Integral von $\kappa_{\partial M}$ zwischen zwei Ecken von M auf dem Rand, da M und M_j die selbe Orientierung induzieren. Alles zusammenfassend gibt die zweite Summe

$$\int_{\partial M} \kappa_{\partial M} \text{vol}_{\partial M}.$$

Wir berechnen nun die dritte Summe mit Hilfe der inneren Winkel

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{F}|} \sum_{p \in \mathcal{E}_{M_j}} \theta_p^{(j)} = - \sum_{j=1}^{|\mathcal{F}|} \sum_{p \in \mathcal{E}_{M_j}} \alpha_p^{(j)} + 3\pi |\mathcal{F}|$$

Wenn eine Ecke zu \mathcal{E}_{in} gehört, dann ergibt die Summe der entsprechen $\alpha_p^{(j)}$ den Winkel 2π . Wenn eine Ecke zu $\mathcal{E}_{\text{out}} = \mathcal{E}_M$ gehört, dann ergibt die Summe der $\alpha_p^{(j)}$ den Winkel $\alpha_p = \pi - \theta_p$, wobei α_p (bzw. θ_p) der innere (bzw. äußere) Winkel in p bezüglich der Fläche M ist. Also kommen wir zur Formel

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{F}|} \sum_{p \in \mathcal{E}_{M_j}} \theta_p^{(j)} = -2\pi |\mathcal{E}_{\text{out}}| + \sum_{p \in \mathcal{E}_M} \theta_p - \pi |\mathcal{E}_{\text{out}}| + 3\pi |\mathcal{F}|.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
-2\pi|\mathcal{E}_{\text{in}}| - \pi|\mathcal{E}_{\text{out}}| + 3\pi|\mathcal{F}| &= -2\pi|\mathcal{E}_{\text{in}}| - \pi|\mathcal{E}_{\text{out}}| + 2\pi|\mathcal{K}_{\text{in}}| + \pi|\mathcal{K}_{\text{out}}| \\
&= -2\pi|\mathcal{E}_{\text{in}}| - \pi|\mathcal{E}_{\text{out}}| + 2\pi|\mathcal{K}_{\text{in}}| + \pi|\mathcal{K}_{\text{out}}| + (\pi|\mathcal{K}_{\text{out}}| - \pi|\mathcal{E}_{\text{out}}|) \\
&= 2\pi(|\mathcal{E}_{\text{in}}| + |\mathcal{E}_{\text{out}}|) - 2\pi(|\mathcal{K}_{\text{in}}| + |\mathcal{K}_{\text{out}}|) \\
&= 2\pi|\mathcal{E}| - 2\pi|\mathcal{K}|
\end{aligned}$$

wobei wir (7.9) in der ersten und (7.8) in der zweiten Gleichung benutzt haben. Also ist die Gleichung (7.14) äquivalent zu

$$\int_M K_M \text{vol}_M + \int_{\partial M} \kappa_{\partial M} \text{vol}_{\partial M} + \sum_{p \in \mathcal{E}_m} \theta_p + 2\pi|\mathcal{E}| - 2\pi|\mathcal{K}| = 2\pi|\mathcal{F}|.$$

Da $\chi(M) = |\mathcal{F}| - |\mathcal{K}| + |\mathcal{E}|$ nach Definition gilt, ist der Beweis vollständig. \square

Wir haben zahlreiche Folgerungen des Satzes von Gauß–Bonnet. Viele entstehen in Kombination mit dem Kurvensatz von Jordan (siehe Aufgabebblatt).

Folgerung 7.25. *Es sei g eine Riemannsche Metrik auf S^2 . Dann existiert $p \in S^2$ mit $K(p) > 0$.* \square

Folgerung 7.26. *Es sei g eine Riemannsche Metrik auf \mathbb{T}^2 . Dann ist g entweder flach (also $K \equiv 0$) oder es existieren $p_-, p_+ \in \mathbb{T}^2$ mit $K(p_-) < 0$ und $K(p_+) > 0$.* \square

Folgerung 7.27. *Es sei M_k eine orientierte kompakte Fläche ohne Rand von Geschlecht $k \geq 2$. Wenn g eine Riemannsche Metrik auf M_k ist, dann existiert $p \in M_k$, sodass $K(p) < 0$. Außerdem gilt für alle Riemannsche Metriken g mit $K \equiv -1$*

$$\text{vol}_g(M_k) = 2k - 2. \quad \square$$

Bemerkung 7.28. Wir werden sehen, dass alle Metriken auf S^2 mit konstanter Krümmung 1 isometrisch zueinander sind. Auf der anderen Seite existieren flache Tori mit beliebigem gesamten Volumen. Auf M_k mit Geschlecht $k \geq 2$ existieren viele Metriken mit $K \equiv -1$, die nicht paarweise isometrisch sind. Alle besitzen aber nach der obigen Folgerung das gleiche Volumen. \triangle

Im Zusammenhang mit Bemerkung 7.9 finden wir den Satz von Poincaré–Hopf.

Folgerung 7.29 (Poincaré–Hopf). *Es sei M eine orientierte kompakte Fläche und X ein Vektorfeld auf M , sodass $Z_X := \{p \in M \mid X(p) = 0\}$ endlich ist. Dann gilt*

$$\sum_{p \in Z_X} \text{ind}_p X = \chi(M). \quad \square$$

Schließlich können wir 3-Ecke mit geodätischen Kanten auf Räumen mit konstanter Krümmung studieren.

Folgerung 7.30 (Theorema Elegantissimum von Gauß). *Es sei T ein 3-Eck auf (S^2, g_{S^2}) mit geodätischen Kanten und inneren Winkeln α, β, γ . Dann gilt*

$$\text{vol}_{g_{S^2}}(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \quad \square$$

Folgerung 7.31. *Es sei T ein 3-Eck auf dem hyperbolischen Raum (H^2, g_{H^2}) mit geodätischen Kanten und inneren Winkeln α, β, γ . Dann gilt*

$$\text{vol}_{g_{H^2}}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \leq \pi. \quad \square$$

Mit dem Satz von Gauß–Bonnet haben wir eine Verbindung zwischen der Krümmung von R-Metriken auf einer kompakten, orientierten Fläche M und der Topologie der Fläche durch ihre Euler-Charakteristik gesehen. Für orientierte, kompakte Flächen ohne Rand kann man zeigen, dass die Euler-Charakteristik eine vollständige Invariante ist. Das heißt: zwei solche Flächen sind homöomorph genau dann, wenn ihre Euler-Charakteristiken übereinstimmen. Wenn die Fläche zusätzlich einen Rand hat, folgt daraus, dass die Euler-Charakteristik und die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Randes eine vollständige Invariante sind. Die grobe Idee ist, dass man entlang jeder Randkomponente eine Scheibe einkleben kann, um eine orientierte, kompakte Fläche ohne Rand zu bekommen. Im nächsten Kapitel wollen wir die Verbindung zwischen Krümmung und Topologie für höhere dimensionale R-Mannigfaltigkeit verstehen. Auch da wird das Vorzeichen der Krümmung eine zentrale Rolle spielen.

8 Krümmung und Topologie in höherer Dimension

In diesem Kapitel wird (M, g) stets eine vollständige R-Mannigfaltigkeit darstellen. Insbesondere ist die Exponentialabbildung $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ für alle $p \in M$ auf dem ganzen Tangentialraum $T_p M$ definiert.

Das Hauptwerkzeug um die Krümmung von g mit der Topologie von M in Verbindung zu setzen sind Familie von Kurven $s \mapsto \gamma_s$ durch eine Geodätische $\gamma_0 = \gamma$ und die assoziierten Vektorfeldern $\partial_s \gamma_s|_{s=0}$ entlang γ . Wir werden diese Untersuchung durchführen mit Hilfe

- (i) von normalen Jacobi-Feldern (eine spezielle Art von Vektorfeldern entlang Geodätischer), falls die Schnittkrümmung von g nicht positiv ist;
- (ii) der zweiten Variation der Länge $s \mapsto L_g(\gamma_s)$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, falls die Schnitt- oder Ricci Krümmung von g positiv sind.

8.1 Familien von Kurven

Definition 8.1. Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine stückweise immersierte Kurve, sodass $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ existieren, wobei $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ eine Immersion ist. Wir setzen

$$\Delta \dot{\gamma}(t_j) := \dot{\gamma}^+(t_j) - \dot{\gamma}^-(t_j), \quad \forall j = 1, \dots, k-1.$$

Ein Vektorfeld X entlang γ ist ein stetiger Schnitt von ${}^\gamma TM$, sodass $X|_{[t_j, t_{j+1}]}$ glatt ist. Wir benutzen die Abkürzung

$$\dot{X} := {}^\gamma \nabla_{\partial_t} X. \quad \triangle$$

Definition 8.2. Eine Familie von stückweise immersierten Kurven durch eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ist eine stetige Abbildung $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:

- (i) die Kurven $\gamma_s := \Gamma(s, \cdot)$ sind stückweise immersiert für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ und $\gamma_0 = \gamma$;
- (ii) es existieren $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$, sodass die Einschränkung $\Gamma|_{(-\epsilon, +\epsilon) \times [t_j, t_{j+1}]}$ glatt für alle $j = 0, \dots, k-1$ ist.

Wir benutzen die Notation

$$X^\Gamma := \partial_s \Gamma(0, \cdot) \in \Gamma({}^\gamma TM). \quad \triangle$$

Bemerkung 8.3. Man kann die gleiche Definition für Kurven auf einem festen Intervall $[a, b]$ statt des Intervalls $[0, 1]$ geben. \triangle

Wir werden oft Kurven γ betrachten, die bestimmte Randbedingungen erfüllen. Es seien $M_0, M_1 \subset M$ zwei feste Untermannigfaltigkeiten, zum Beispiel zwei Punkte. Wir setzen

$$\mathcal{C}_{M_0, M_1} := \left\{ \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ stückweise glatt Immersion} \mid \gamma(0) \in M_0, \gamma(1) \in M_1 \right\}. \quad (8.1)$$

Wir werden die unpräzise Notation $\Gamma \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ benutzen, zu meinen, dass $\gamma_s \in \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wir bezeichnen mit $\Gamma({}^\gamma TM)_{M_0, M_1}$ die Vektorfelder $X \in \Gamma({}^\gamma TM)$, sodass

$$X(0) \in T_{\gamma(0)} M_0, \quad X(1) \in T_{\gamma(1)} M_1.$$

Wir können nun die folgende Beziehung zwischen Vektorfeldern entlang γ und Familie von Kurven durch γ beweisen

Hilfssatz 8.4. *Es seien M_0 und M_1 Untermannigfaltigkeiten von M . Wenn $\Gamma \subset \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ eine Familie von Kurven durch γ ist, dann $X^\Gamma \in \Gamma({}^\gamma TM)_{M_0, M_1}$. Umgekehrt sei $\gamma \in \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ und $X \in \Gamma({}^\gamma TM)_{M_0, M_1}$. Dann existiert eine Familie $\Gamma \subset \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ durch γ mit $X = X^\Gamma$.*

Beweis. Die erste Aussage ist einfach, weil $s \mapsto \Gamma(s, 0) \in M_0$ und $s \mapsto \Gamma(s, 1) \in M_1$ für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Für die zweite Aussage definieren wir

$$\Gamma(s, t) := \exp_{\gamma(t)}(sX(t)). \quad (8.2)$$

Dann

$$\partial_s \Gamma(0, t) = d_0 \exp_{\gamma(t)} \cdot X(t) = X(t).$$

Aus der Formel (8.2) sehen wir, dass $\exp_{\gamma(0)}(sX(0)) \in M_0$ und $\exp_{\gamma(1)}(sX(1)) \in M_1$ gilt, falls M_0 und M_1 total geodätisch sind und X tangential zu M_0 für $t = 0$ und tangential

zu M_1 für $t = 1$ ist. Wenn M_0 und M_1 nicht total geodätisch sind, können wir eine neue Metrik \tilde{g} finden, sodass M_0 und M_1 total geodätisch in einer Umgebung von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ sind und dann das obige Argument benutzen. Um \tilde{g} in einer Umgebung von $\gamma(0)$ zu konstruieren, nehmen wir zuerst eine Karte (U, φ) , sodass $\varphi(U \cap M_0)$ eine offene Menge eines Untervektorraums von \mathbb{R}^n ist. Dann ist $U \cap M_0$ total geodätisch für $\varphi^*g_{\mathbb{R}^n}$. Wir können nun eine glatte Funktion $\chi : M \rightarrow [0, 1]$ mit $T(\chi) \subset U$ und $\chi = 1$ in einer Umgebung $U' \subset U$ von $\gamma(0)$ benutzen, um die gewünschte Metrik als $\tilde{g} = \chi\varphi^*g_{\mathbb{R}^n} + (1 - \chi)g$ zu definieren. \square

8.2 Jacobi-Felder

Definition 8.5. Es sei Γ eine Familie von Kurven durch eine Geodätische γ , sodass γ_s eine Geodätische für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ ist. Dann heißt

$$J := \partial_s \Gamma(0, \cdot)$$

ein Jacobi-Feld entlang der Geodätischen γ . Falls $g_{\gamma(t)}(J(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$ heißt J ein normales Jacobi-Feld entlang γ . Wir schreiben $\mathcal{J}(\gamma)$ für die Menge aller Jacobi-Felder entlang γ und $\mathcal{J}^\perp(\gamma)$ für die Menge der normalen Jacobi-Felder entlang γ . \triangle

Hilfssatz 8.6. *Es sei γ eine Geodätische und J ein Jacobi-Feld entlang γ . Dann erfüllt J die Jacobi-Gleichung*

$$\ddot{J} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0. \quad (8.3)$$

Beweis. Es sei Γ eine Familie von Geodätischen durch γ und sei ${}^\Gamma\nabla$ die Pullback-Ableitung. Da die Kurven γ_s geodätisch sind, wissen wir, dass

$${}^\Gamma\nabla_{\partial_t} \partial_t \Gamma = 0. \quad (8.4)$$

Es sei nun $R^{\Gamma\nabla}$ die Krümmung von ${}^\Gamma\nabla$. Nach (6.3) gilt

$$R(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma) \partial_t \Gamma = R^{\Gamma\nabla}(\partial_s, \partial_t) \partial_t \Gamma = {}^\Gamma\nabla_{\partial_s} {}^\Gamma\nabla_{\partial_t} \partial_t \Gamma - {}^\Gamma\nabla_{\partial_t} {}^\Gamma\nabla_{\partial_s} \partial_t \Gamma = 0 - {}^\Gamma\nabla_{\partial_t} {}^\Gamma\nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma,$$

wobei wir im letzten Schritt (8.4) und die Symmetrie von ${}^\Gamma\nabla$ benutzt haben. Wir werten diese Identität auf $s = 0$ aus und finden

$$R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = -{}^\gamma\nabla_{\partial_t} {}^\gamma\nabla_{\partial_t} J. \quad \square$$

Wir wollen nun sehen, dass umgekehrt alle Lösungen der Jacobi-Gleichung Jacobi-Vektorfelder sind. Dafür studieren wir die Jacobi-Gleichung mit Hilfe eines parallelen Rahmens entlang Geodätischen.

Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische und J eine Lösung der Jacobi-Gleichung (8.3). Es sei $e_1, \dots, e_n \in \mathfrak{X}({}^\gamma TM)$ ein paralleler Rahmen entlang γ . Wir schreiben

$$J = \sum_{i=1}^n J^i e_i. \quad (8.5)$$

Wir haben Funktionen $R_i^j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j \leq n$, sodass

$$R(e_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = \sum_{j=1}^n R_i^j e_j, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

und

$$R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = \sum_{i,j=1}^n J^i R_i^j e_j$$

Da die e_i parallel sind, leiten wir aus der Leibniz-Regel her, dass

$$J = \sum_{i=1}^n \dot{J}^i e_i, \quad \ddot{J} = \sum_{i=1}^n \ddot{J}^i e_i. \quad (8.6)$$

Deswegen ist die Gleichung (8.3) äquivalent zu

$$\ddot{J}^j(t) + \sum_{i=1}^n R_i^j(t) J^i(t) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (8.7)$$

Nun ist (8.7) ein zeitabhängiges, lineares System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den n Unbekannten J^1, \dots, J^n ist. Nach (8.5) und (8.6), wenn $t_* \in [0, 1]$ und $v, w \in T_{\gamma(t_*)}M$ fest sind, existiert genau eine Lösung J der Gleichung (8.3) auf dem ganzen Intervall $[0, 1]$ mit $J(t_*) = v$ und $\dot{J}(t_*) = w$.

Hilfssatz 8.7. *Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische. Dann ist $\mathcal{J}(\gamma)$ genau die Menge der Lösungen der Jacobi-Gleichung (8.3). Insbesondere sind die Mengen $\mathcal{J}(\gamma)$ und $\mathcal{J}^\perp(\gamma)$ Vektorräume. Die Abbildung*

$$J \mapsto (J(0), \dot{J}(0))$$

liefert lineare Isomorphismen

$$\mathcal{J}(\gamma) \rightarrow T_{\gamma(0)}M \times T_{\gamma(0)}M, \quad \mathcal{J}^\perp(\gamma) \rightarrow (T_{\gamma(0)}M)^\perp \times (T_{\gamma(0)}M)^\perp,$$

wobei $(T_{\gamma(0)}M)^\perp \subset T_{\gamma(0)}M$ der normale Vektorraum von $\dot{\gamma}(0)$ ist.

Beweis. Es sei J eine Lösung der Jacobi-Gleichung (8.3). Wir nehmen eine beliebige Kurve $\delta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, sodass $\delta(0) = \gamma(0)$ und $\dot{\delta}(0) = J(0)$. Wir erweitern $\dot{\gamma}(0)$ zu einem Vektorfeld $s \mapsto v(s) \in T_{\delta(s)}M$ entlang δ , sodass ${}^\delta \nabla_{\partial_s} v(0) = \dot{J}(0)$. Wir behaupten, dass

$$\Gamma(s, t) := \gamma_{v(s)}(t), \quad \forall (s, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1]$$

eine Familie von Geodätischen ist, sodass $\partial_s \Gamma(0, \cdot) = J$. Da $\partial_s \Gamma(0, t)$ und $J(t)$ die Jacobi-Gleichung erfüllen, müssen wir nur prüfen, dass

$$\partial_s \Gamma(0, 0) = \partial_s \gamma_{v(s)}(0) = \frac{d\delta}{ds}(0) = J(0)$$

und dass

$$\gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma(0, t) \Big|_{t=0} = \Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma(s, t) \Big|_{(s,t)=(0,0)} = \Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_t \Gamma(s, t) \Big|_{(s,t)=(0,0)} = \delta \nabla_{\partial_s} v(s) \Big|_{s=0} = \dot{J}(0),$$

wobei wir benutzt haben, dass $\partial_t \Gamma(s, 0) = \dot{\gamma}_{v(s)}(0) = v(s)$ ist.

Es sei nun $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $f(t) := g_{\gamma(t)}(J(t), \dot{\gamma}(t))$. Wir finden, dass

$$\dot{f} = g_{\gamma}(\dot{J}, \dot{\gamma}) + g_{\gamma}(J, \ddot{\gamma}) = g_{\gamma}(\dot{J}, \dot{\gamma})$$

und nach der Jacobi-Gleichung (8.3) gilt

$$\ddot{f} = g_{\gamma}(\ddot{J}, \dot{\gamma}) = -g_{\gamma}(R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

Wir können daher die Gleichung $\ddot{f} = 0$ lösen:

$$g_{\gamma(t)}(J(t), \dot{\gamma}(t)) = g_{\gamma(0)}(J(0), \dot{\gamma}(0)) + t \cdot g_{\gamma(0)}(\dot{J}(0), \dot{\gamma}(0)), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Es folgt, dass $J \in \mathcal{J}^{\perp}(\gamma)$ genau dann, wenn $g_{\gamma(0)}(J(0), \dot{\gamma}(0)) = g_{\gamma(0)}(\dot{J}(0), \dot{\gamma}(0)) = 0$. \square

Hilfssatz 8.8. *Es sei $p \in M$ und $v \in T_p M$. Für alle $w \in T_p M$ ist dann*

$$J_{v,w}(t) := t \cdot d_{tv} \exp_p \cdot w \tag{8.8}$$

das eindeutige Jacobi-Feld entlang γ_v , sodass $J_{v,w}(0) = 0$ und $\dot{J}_{v,w}(0) = w$. Insbesondere:

$$J_{v,w}(1) = d_v \exp_p \cdot w. \tag{8.9}$$

und $J_{v,w}$ ist genau dann normal, wenn $g_p(w, v) = 0$.

Beweis. Wir betrachten die Familie von Geodätischen $\Gamma(s, t) = \gamma_{v+sw}(t) = \exp_p(t(v+sw))$. Dann ist

$$\partial_s \Gamma(0, t) = t d_{tv} \exp_p \cdot w = J(t).$$

Es sei $W \in \Gamma(\gamma_v TM)$ das Vektorfeld entlang γ_v gegeben durch $W(t) := d_{tv} \exp_p \cdot w$. Dann gilt $W(0) = d_0 \exp_p \cdot w = w$ und $J(t) = tW(t)$. Wir bekommen $J(0) = 0 \cdot W(0) = 0$ und nach der Leibniz-Regel

$$\dot{J}(0) = 0 \cdot \dot{W}(0) + 1 \cdot W(0) = w. \quad \square$$

Hilfssatz 8.9. *Es sei $p \in M$ und $v \in T_p M$ mit $v \neq 0$. Dann ist $d_v \exp_p$ genau dann nicht invertierbar, wenn ein Jacobi-Feld $J \neq 0$ entlang $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ mit $J(0) = 0$ und $J(1) = 0$ existiert.*

Beweis. Nach (8.9) ist $w \in T_p M$ genau dann in $\ker d_v \exp_p$, wenn $J_{v,w}(1) = 0$. Die Aussage folgt, da

$$J_{v,w} = 0 \iff w = 0. \quad \square$$

Durch Gleichung (8.9) können wir die Eigenschaften von Jacobi-Feldern mit Eigenschaften der Exponentialabbildung in Verbindung setzen. Wir werden sofort zwei wichtige Folgerungen dieser Verbindung: der Satz von Cartan–Hadamard über Räume nicht positiver Schnittkrümmung und der Satz von Killing–Hopf, der die einfach zusammenhängenden Räume konstanter Schnittkrümmung bis auf Isometrie charakterisiert.

8.3 Der Satz von Killing–Hopf

Es seien (\tilde{M}, \tilde{g}) und (M, g) zwei vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $p \in M$ zwei Punkte mit Exponentialabbildungen $\text{e}\tilde{\text{x}}\tilde{p} : \mathcal{E}_{\tilde{p}} \rightarrow \tilde{M}$ und $\text{exp}_p : \mathcal{E}_p \rightarrow M$. Wir nehmen an, dass $r < \text{inj}_{\tilde{p}}(\tilde{M}, \tilde{g})$ und dass $B_r^{T_{\tilde{p}}\tilde{M}} \subset \mathcal{E}_{\tilde{p}}$. Wenn $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine lokale Isometrie mit $F(\tilde{p}) = p$ ist, wissen wir aus Satz 4.34, dass

$$F|_{B_r(\tilde{p})} = \text{exp}_p \circ \text{d}_{\tilde{p}}F \circ (\text{e}\tilde{\text{x}}\tilde{p})^{-1}.$$

Wir wollen nun umgekehrt mit einer linearen Isometrie $\psi : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_pM$ anfangen und uns fragen, ob

$$F : B_r(\tilde{p}) \rightarrow M, \quad F := \text{exp}_p \circ \psi \circ (\text{e}\tilde{\text{x}}\tilde{p})^{-1}|_{B_r(\tilde{p})} \quad (8.10)$$

eine lokale Isometrie ist. Da $\psi = \text{d}_{\tilde{p}}F$ muss zusätzlich $\psi^*R_p = \tilde{R}_{\tilde{p}}$ nach der Gauß-Formel gelten. Wenn schließlich die Krümmungstensoren R und \tilde{R} parallel bezüglich der entsprechenden Levi-Civita Ableitungen ∇ und $\tilde{\nabla}$ sind, können wir die Frage bejahen.

Hilfssatz 8.10 (Cartan). *Es seien (M, g) und (\tilde{M}, \tilde{g}) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten, sodass $\nabla R = 0$ und $\tilde{\nabla} \tilde{R} = 0$. Es sei $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $p \in M$ und $r \in (0, \infty]$ mit*

$$r \leq \text{injr}_{\tilde{p}}(\tilde{M}, \tilde{g}), \quad B_r^{T_{\tilde{p}}\tilde{M}} \subset \mathcal{E}_{\tilde{p}}. \quad (8.11)$$

Wenn $\psi : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_pM$ eine lineare Isometrie mit $\psi^*R_p = \tilde{R}_{\tilde{p}}$ ist, dann ist die Abbildung $F : B_r(\tilde{p}) \rightarrow M$, die durch (8.10) definiert wird, eine lokale Isometrie.

Bemerkung 8.11. Für den Beweis und die Anwendungen ist es günstig, die kovariante Ableitung ∇R des Krümmungstensor auf der folgenden Weise umzuschreiben. Es sei $p \in M$ und $v \in T_pM$. Wir nehmen weiter $v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_pM$. Es sei $\delta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine beliebige Kurve mit $\delta(0) = 0$ und $\dot{\delta}(0) = v$. Es sei e_i die parallele Verschiebung von v_i entlang δ für $i = 1, \dots, 4$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\nabla_v R)(v_1, v_2, v_3, v_4) &= (\delta \nabla_{\partial_t} R_\delta)(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ &= \frac{\text{d}}{\text{d}t} \Big|_{t=0} \left(R_{\delta(t)}(e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t)) - R_p(\dot{e}_1(0), v_2, v_3, v_4) \right. \\ &\quad \left. - R_p(v_1, \dot{e}_2(0), v_3, v_4) - R_p(v_1, v_2, \dot{e}_3(0), v_4) - R_p(v_1, v_2, v_3, \dot{e}_4(0)) \right). \end{aligned}$$

Da $\dot{e}_i(0) = 0$ für $i = 1, \dots, 4$ finden wir die Formel

$$(\nabla_v R)(v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{\text{d}}{\text{d}t} \Big|_{t=0} \left(R_{\delta(t)}(e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t)) \right). \quad (8.12)$$

Man kann nun diese Formel benutzen, um zu zeigen, dass $\nabla R = 0$, falls g konstante Schnittkrümmung c besitzt. In diesem Fall ist die rechte Seite von (8.12) gleich

$$c \frac{\text{d}}{\text{d}t} \Big|_{t=0} \left(g_{\delta(t)}(e_1(t), e_4(t))g_{\delta(t)}(e_2(t), e_3(t)) - g_{\delta(t)}(e_1(t), e_3(t))g_{\delta(t)}(e_2(t), e_4(t)) \right) = c(0-0) = 0,$$

wobei wir benutzt haben, dass die Parallelverschiebung die Metrik g erhält. Da p, v, v_1, v_2, v_3, v_4 beliebig waren, folgt $\nabla R = 0$ aus (8.12). △

Beweis. Es sei $\tilde{q} = \exp_{\tilde{p}}(\tilde{v}) \in B_{\tilde{r}}(\tilde{p}) \setminus \{\tilde{p}\}$ für ein $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ mit $0 < |\tilde{v}|_{\tilde{g}} < r$ und $\tilde{u} \in T_{\tilde{q}}\tilde{M}$. Wir wollen zeigen, dass

$$|d_{\tilde{q}}F \cdot \tilde{u}|_g = |\tilde{u}|_{\tilde{g}}. \quad (8.13)$$

Wir setzen $\tilde{w} := (d_{\tilde{v}} \exp_{\tilde{p}})^{-1} \cdot \tilde{u}$, sodass $d_{\tilde{v}} \exp_{\tilde{p}} \cdot \tilde{w} = \tilde{u}$. Wir schreiben $v := \psi(\tilde{v})$ und $w := \psi(\tilde{w})$. Wir wenden die Ketten-Regel auf (8.10) an und finden

$$d_{\tilde{q}}F \cdot \tilde{u} = d_v \exp_p \cdot w.$$

Wir sehen, dass (8.13) äquivalent zu

$$|d_v \exp_p \cdot w|_g = |d_{\tilde{v}} \exp_{\tilde{p}} \cdot \tilde{w}|_{\tilde{g}} \quad (8.14)$$

ist. Wir betrachten nun das Jacobi-Feld $J_{\tilde{v}, \tilde{w}}$ entlang $\gamma_{\tilde{v}}$ und das Jacobi-Feld $J_{v, w}$ entlang γ_v , sodass (8.14) äquivalent zu

$$|J_{v, w}(1)|_g = |J_{\tilde{v}, \tilde{w}}(1)|_{\tilde{g}} \quad (8.15)$$

ist. Es sei nun $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ eine orthonormale Basis von $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Da ψ eine lineare Isometrie ist, bekommen wir eine orthonormale Basis $v_1 := \psi(\tilde{v}_1), \dots, \psi(v_n)$ von $T_p M$. Wir schreiben $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ und e_1, \dots, e_n für die parallelen Verschiebungen dieser Basen entlang $\gamma_{\tilde{v}}$ und γ_v . Wir haben die Koordinatendarstellung $\tilde{w} = \sum_{i=1}^n \tilde{w}^i \tilde{v}_i$, $w = \sum_{i=1}^n w^i v_i$ und $\tilde{w}^i = w^i$ für alle $i = 1, \dots, n$, da $w = \psi(\tilde{w})$. Wenn wir die Koordinatendarstellung

$$J_{\tilde{v}, \tilde{w}} = \sum_{i=1}^n J_{\tilde{v}, \tilde{w}}^i \tilde{e}_i, \quad J_{v, w} = \sum_{i=1}^n J_{v, w}^i e_i$$

der Jacobi-Felder betrachten, behaupten wir, dass

$$J_{\tilde{v}, \tilde{w}}^i = J_{v, w}^i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Das ist genug um (8.15) zu zeigen, da in diesem Fall

$$|J_{v, w}|_g = \sqrt{\sum_{i=1}^n (J_{v, w}^i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (J_{\tilde{v}, \tilde{w}}^i)^2} = |J_{\tilde{v}, \tilde{w}}|_{\tilde{g}}.$$

Wir bemerken, dass für alle $i = 1, \dots, n$

$$J_{\tilde{v}, \tilde{w}}^i(0) = 0 = J_{v, w}^i(0), \quad (\dot{J}_{\tilde{v}, \tilde{w}})^i(0) = \tilde{w}^i = w^i = (\dot{J}_{v, w})^i(0).$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen, dass die Vektorfunktionen $(J_{\tilde{v}, \tilde{w}}^i)$ und $(J_{v, w}^i)$ das gleiche System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung lösen. Nach (8.7) müssen wir also zeigen, dass

$$\tilde{R}_i^j = R_i^j, \quad \text{wobei} \quad \tilde{R}_i^j := \tilde{R}_{\gamma_{\tilde{v}}}(\tilde{e}_i, \dot{\gamma}_{\tilde{v}}, \dot{\gamma}_{\tilde{v}}, \tilde{e}_j), \quad R_i^j = R_{\gamma_v}(e_i, \dot{\gamma}_v, \dot{\gamma}_v, e_j).$$

Es gilt

$$\tilde{R}_{ij}(0) = \tilde{R}_{\tilde{p}}(\tilde{v}_i, \tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{v}_j) = R_p(\psi(\tilde{v}_i), \psi(\tilde{v}), \psi(\tilde{v}), \psi(\tilde{v}_j)) = R_p(v_i, v, v, v_j) = R_i^j(0)$$

und die Aussage folgt, wenn wir zeigen, dass $\dot{\tilde{R}}_i^j = 0$ und $\dot{R}_i^j = 0$. Das folgt aus der Tatsache, dass die Krümmungstensoren parallel sind. Denn, für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$\dot{R}_i^j(t) = \frac{d}{ds}(R_{\gamma_v(s)}(e_i(s), \dot{\gamma}_v(s), \dot{\gamma}_v(s), e_j(s))) = (\nabla_{\dot{\gamma}_v(t)}R)(e_i(t), \dot{\gamma}_v(t), \dot{\gamma}_v(t), e_j(t)) = 0,$$

wobei wir (8.12) benutzt haben und die Tatsache, dass e_i , $\dot{\gamma}_v$ und e_j parallel entlang γ_v sind. Auf ähnlicher Weise folgt $\dot{\tilde{R}}_i^j(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$. \square

Folgerung 8.12. *Es sei (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $c \in \mathbb{R}$, wobei $n \geq 2$. Dann ist (M, g) lokal isometrisch zu einem der Modellräume S_R^n , \mathbb{R}^n und H_R^n . Wenn (M, g) vollständig ist, dann ist die Riemannsche universelle Überlagerung (\tilde{M}, \tilde{g}) von (M, g) isometrisch zu einem der obigen Modellräume. Es folgt: eine einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) konstanter Schnittkrümmung ist isometrisch zu einem der Modellräume.*

Proof. Es sei (\tilde{M}, \tilde{g}) der Modellraum mit Schnittkrümmung c . Es sei $\tilde{p} \in \tilde{M}$ und $p \in M$ beliebig. Wir wählen eine willkürliche lineare Isometrie $\psi : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_pM$, dann

$$\psi^*R_p = c\psi^*(g_p \otimes g_p) = c\tilde{g}_{\tilde{p}} \otimes \tilde{g}_{\tilde{p}} = \tilde{R}_{\tilde{p}}.$$

Wir können nun $r > 0$ so klein wählen, dass (8.11) gilt. Nach Hilfssatz 8.10 sind (M, g) und (\tilde{M}, \tilde{g}) lokal isometrisch.

Es sei nun angenommen, dass (M, g) vollständig ist. Wenn $c \leq 0$, dann können wir $r = \infty = \text{inrad}(\tilde{M}, \tilde{g})$ in (8.11) nehmen. Wir finden auf dieser Weise eine lokale Isometrie $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$. Nach Satz 4.70 ist F eine Riemannsche Überlagerung, da (\tilde{M}, \tilde{g}) vollständig ist. Das ist die universelle Überlagerung, da $\tilde{M} \cong \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist.

Wenn $c = 1/R^2 > 0$, dann $(\tilde{M}, \tilde{g}) = (S_R^n, g_{S_R^n})$. Wir können $r = \pi R = \text{inrad}(S_R^n, g_{S_R^n})$ nehmen und wir bekommen eine lokale Isometrie $F : S_R^n \setminus \{-\tilde{p}\} \rightarrow M$. Es sei nun $\tilde{q} \in S_R^n$ mit $\tilde{q} \neq \tilde{p}$ und $\tilde{q} \neq -\tilde{p}$. Wir wenden Hilfssatz (8.10) mit $\psi_1 = d_{\tilde{q}}F$ an und wir finden eine lokale Isometrie $F_1 : S_R^n \setminus \{-\tilde{q}\} \rightarrow M$ mit $d_{\tilde{q}}F_1 = d_{\tilde{q}}F$. Da $S_R^n \setminus \{-\tilde{p}, -\tilde{q}\}$ zusammenhängend ist, gilt $F_1 = F$ auf $S_R^n \setminus \{-\tilde{p}, -\tilde{q}\}$. Daher können wir F und F_1 zusammenkleben und eine lokale Isometrie $F_2 : S_R^n \rightarrow M$ bekommen. Da S_R^n vollständig ist, ist F_2 eine Riemannsche Überlagerung. Das ist die universelle Überlagerung, da S_R^n einfach zusammenhängend ist. \square

8.4 Der Satz von Cartan–Hadamard

Wir wollen nun die Eigenschaften von Jacobi-Feldern verstehen für Mannigfaltigkeiten nicht positiver Krümmung. Wir haben dafür den folgenden entscheidenden Hilfssatz.

Hilfssatz 8.13. *Es sei angenommen, dass die Schnittkrümmung von (M, g) nicht positiv ist: $K \leq 0$. Es seien $p \in M$ und $v \in \mathcal{E}_p$ mit $v \neq 0$ beliebig. Es sei $J \neq 0$ ein Jacobi-Feld entlang $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ mit $J(0) = 0$. Dann*

$$g_{\gamma_v(t)}(\dot{J}(t), J(t)) > 0, \quad J(t) \neq 0, \quad \forall t \in (0, 1].$$

Genauer gilt

$$g_{\gamma_v(t)}(\dot{J}(t), J(t)) \geq \frac{|J(t)|_{\gamma_v(t)}^2}{t}, \quad |J(t)|_{\gamma_v(t)} \geq t|\dot{J}(0)|_p, \quad \forall t \in (0, 1] \quad (8.16)$$

und beide Ungleichung sind strikt, falls $K < 0$ und J nicht (überall) parallel zu $\dot{\gamma}_v$ steht.

Proof. Es sei J ein Jacobi-Feld entlang $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ mit $J(0) = 0$ und $\dot{J}(0) \neq 0$. Wir setzen $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, $f(t) = \frac{1}{2}g_{\gamma_v(t)}(J(t), J(t))$. Dann $\dot{f} = g_{\gamma_v}(\dot{J}, J)$ und $f(0) = 0$. Außerdem

$$\ddot{f} = g_{\gamma_v}(\dot{J}, \dot{J}) + g_{\gamma_v}(\ddot{J}, J) = g_{\gamma_v}(\dot{J}, \dot{J}) - g_{\gamma_v}(R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, J).$$

Da $K \leq 0$ gilt, wissen wir, dass $g_{\gamma_v}(R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, J) \leq 0$. Insbesondere $\ddot{f}(0) = |\dot{J}(0)|^2 > 0$ und $\ddot{f}(t) \geq 0$ für $t \in [0, 1]$. Dann

$$\dot{f}(t) = \dot{f}(0) + \int_0^t \ddot{f}(t') dt' > 0 \quad \forall t \in (0, 1]$$

und

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \dot{f}(t') dt' > 0 \quad \forall t \in (0, 1].$$

Es folgt daraus, dass $J(t) \neq 0$ für alle $t \in (0, 1]$.

Wir wollen nun die genaueren Abschätzungen beweisen. Wir definieren dafür

$$\lambda : (0, 1] \rightarrow (0, \infty) \quad \lambda(t) := \frac{|J(t)|^2}{g_{\gamma_v(t)}(\dot{J}(t), J(t))}$$

und bemerken, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_{\gamma_v(t)}(\dot{J}(t), J(t))}{|\dot{J}(t)|^2 + g_{\gamma_v(t)}(\ddot{J}(t), J(t))} = \frac{g_p(\dot{J}(0), J(0))}{|\dot{J}(0)|^2 + g_p(\ddot{J}(0), J(0))} = \frac{0}{|\dot{J}(0)|} = 0,$$

da $\dot{J}(0) \neq 0$. Wir schätzen nun die erste Ableitung von λ mit Hilfe der Cauchy–Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{2g_{\gamma_v}(\dot{J}, J)^2 - |J|^2|\dot{J}|^2 - |J|^2g_{\gamma_v}(\ddot{J}, J)}{g_{\gamma_v}(\dot{J}, J)^2} \leq \frac{2g_{\gamma_v}(\dot{J}, J)^2 - g_{\gamma_v}(\dot{J}, J)^2 + |J|^2R_{\gamma_v}(J, \dot{\gamma}_v, \dot{\gamma}_v, J)}{g_{\gamma_v}(\dot{J}, J)^2} \\ &\leq \frac{g_{\gamma_v}(\dot{J}, J)^2 + 0}{g_{\gamma_v}(\dot{J}, J)^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung strikt ist, falls $K < 0$ und J nicht parallel zu $\dot{\gamma}_v$ steht. Also gilt

$$\frac{|J(t)|^2}{g_{\gamma_v(t)}(\dot{J}(t), J(t))} \leq t, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Wir schreiben diese Ungleichung als

$$\frac{d}{dt} \log t = \frac{1}{t} \leq \frac{g_{\gamma_v(t)}(\dot{J}(t), J(t))}{|J(t)|^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \log |J(t)|^2 \right),$$

die gleichbedeutend mit

$$\frac{d}{dt} \left(\log \frac{|J(t)|^2}{t^2} \right) \geq 0$$

ist. Also ist die Funktion $\log \frac{|J(t)|^2}{t^2}$ monoton steigend. Da der Logarithmus strikt monoton steigend ist, folgt es, dass auch $\frac{|J(t)|^2}{t^2}$ monoton steigend ist. Also

$$\frac{|J(t)|^2}{t^2} \geq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|J(s)|^2}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_{\gamma_v(s)}(\dot{J}(s), J(s))}{s} = |\dot{J}(0)|^2,$$

wobei wir zweimal die Regel von l'Hopital benutzt haben. \square

Satz 8.14 (Cartan–Hadamard). *Es sei (M, g) eine n -dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht positiver Schnittkrümmung. Dann ist $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ für alle $p \in M$ die universelle Überlagerung von M . Wenn M einfach zusammenhängend ist, ist daher $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus für alle $p \in M$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 8.9 und 8.13 ist $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus. Dann ist $g^p := \exp_p^* g$ eine Riemannsche Metrik und $\exp_p : (T_p M, g^p) \rightarrow (M, g)$ ist eine lokale Isometrie. Nun ist $(T_p M, g^p)$ vollständig, da alle Geodätischen durch $0 \in T_p M$ sind durch $t \mapsto tv$ für ein $v \in T_p M$ und daher sind für alle Zeiten definiert. Es folgt aus 4.70, dass \exp_p eine (Riemannsche) Überlagerung ist. Die letzten zwei Aussagen folgen aus der Eindeutigkeit der universellen Überlagerung bis auf Diffeomorphismen. \square

Bemerkung 8.15. Man könnte sich fragen, ob eine Umkehrung des Satzes von Cartan–Hadamard gilt. Wenn wir wissen, dass $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus (äquivalent die universelle Überlagerung von M) für alle $p \in M$ ist, können wir schließen, dass $K \leq 0$. Es scheint sehr schwierig, diese Frage in allgemeinen zu beantworten. Für $M = \mathbb{T}^n$ wurde aber von E. Hopf für $n = 2$ und von Burago–Ivanov für $n > 2$ bewiesen, dass eine solche Metrik flach sein muss (Burago, Ivanov, *Riemannian Tori without conjugate points are flat*, GAFA). Also gilt $K = 0$! \triangle

Nach dem Satz von Cartan–Hadamard lässt S^n für $n \geq 2$ keine Riemannsche Metrik mit $K \leq 0$ (für $n = 2$ folgt diese Aussage schon aus dem Satz von Gauß–Bonnet) zu. Ein paar weiterer Folgerungen sind hier unten gesammelt.

Folgerung 8.16. *Es sei (M, g) eine n -dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht positiver Schnittkrümmung. Es gilt*

(a) *die universelle Überlagerung von M ist diffeomorph zu \mathbb{R}^n ;*

(b) *alle die Homotopie-Gruppen $\pi_k(M)$ mit $k \geq 2$ verschwinden;*

(c) *M ist nicht diffeomorph zu $S^\ell \times N$, wobei $\ell \geq 2$ und N eine Mannigfaltigkeit ist.*

Beweis. Es sei $\mathbb{R}^n \rightarrow M$ die universelle Überlagerung von M . Dann gilt $\pi_k(M) = \pi_k(\mathbb{R}^n) = 0$ für $k \geq 2$. Da $\pi_\ell(S^\ell \times N) = \pi_\ell(S^\ell) \times \pi_\ell(N)$ und $\pi_\ell(S^\ell) = \mathbb{Z}$ folgt die zweite Aussage aus der ersten. \square

8.5 Cartan–Hadamard Mannigfaltigkeiten

Definition 8.17. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt Cartan–Hadamard (in kurzem CH) Mannigfaltigkeit, wenn sie einfach zusammenhängend und vollständig ist und nicht positive Schnittkrümmung besitzt: $K \leq 0$. \triangle

In diesem Abschnitt wollen wir CH-Mannigfaltigkeiten (M, g) analysieren. Für jedes $p \in M$ ist $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus, sodass jedes Paar $p, q \in M$ von Punkten durch genau eine Geodätische verbunden ist. Diese Geodätische besitzt dann Länge $d_g(p, q)$ nach dem Satz von Hopf–Rinow. Das heißt auch, dass zwei beliebige Geodätische in M entweder disjunkt oder genau einen Schnittpunkt besitzen. In diesem Sinn verhalten sich Geodätische in CH-Mannigfaltigkeiten, wie Geodätische im euklidischen Raum und wir werden sagen, dass eine Menge von Punkten kollinear ist, falls sie zur selben Geodätischen gehören.

Wir können den Begriff von geodätischen m -Ecken von Dimension zwei auf beliebige Dimensionen übertragen.

Definition 8.18. Ein geodätisches m -Eck mit Eckpunkten $p_1, \dots, p_m \in M$ ist die Verkettung der Geodätischen $\gamma_{v_1}, \gamma_{v_2}, \dots, \gamma_{v_m}$, die p_1 mit p_2 , p_2 mit p_3 , ... und p_m mit p_1 verbinden. Der unorientierte äußere Winkel $\theta_i \in [0, \pi]$ in p_i ist durch die Gleichung

$$\cos \theta_i = \frac{g_{p_i}(\dot{\gamma}_{v_i}(0), \dot{\gamma}_{v_{i-1}}(1))}{|v_{i-1}| |v_i|}.$$

Der unorientierte innere Winkel in p_i ist durch $\alpha_i := \pi - \theta_i \in [0, \pi]$ gegeben. \triangle

Unser Ziel ist, einen Kosinussatz und einen Satz über die Summe der inneren Winkel eines geodätischen 3-Ecks zu beweisen. Wir müssen dafür die Abstandsfunktion zwischen Punkten besser verstehen. Für $p \in M$ setzen wir

$$A_p : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_p(q) := \frac{1}{2} d_g(p, q) = \frac{1}{2} |\exp_p^{-1}(q)|_{g_p}^2,$$

die eine glatte Funktion auf M ist. Wir schreiben nun A_p in normalen Polarkoordinaten $M \setminus \{p\} \rightarrow (0, \infty) \times S^{n-1}$. In diesen Koordinaten hat g die Form

$$g^p = dr^2 + h^r, \quad (8.17)$$

wobei $r = |\cdot| : T_p M \rightarrow (0, \infty)$. Also ist

$$\frac{1}{2}r^2 = A_p \circ \exp_p.$$

Nach (8.17) ist der Gradient der Funktion r bezüglich g^p durch ∂_r gegeben. Daher ist

$$\text{grad } \frac{1}{2}r^2(v) = (r \text{grad } r)(v) = (r \partial_r)(v) = v, \quad \text{grad } A_p(q) = d_v \exp_p \cdot v = \dot{\gamma}_v(1).$$

Wir wollen nun die Hessesche-Form von A_p berechnen und abschätzen.

Hilfssatz 8.19. *Es sei $q = \exp_p(v) \in M$ und $u \in T_q M$ mit $u \neq 0$, sodass*

$$u = d_v \exp_p \cdot w = J_{v,w}(1)$$

gilt, wobei $J \in \mathcal{J}(\gamma_v)$ das Jacobi-Feld mit $J(0) = 0$ und $\dot{J}(0) = w$ ist. Dann

$$H(A_p)_q(u, u) = g_q(\dot{J}_{v,w}(1), J_{v,w}(1)) \geq g_q(u, u).$$

Insbesondere ist $H(A_p)$ positiv definit. Wenn $K < 0$ ist und u nicht parallel zu $\dot{\gamma}_v(1) \in T_q M$ ist, dann ist die obige Ungleichung strikt.

Beweis. Es sei $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ gegeben durch $\Gamma(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$ und sei $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ gegeben als $\sigma(s) := \Gamma(s, 1)$, sodass $\dot{\sigma}(0) = u$. Die Einschränkung von $\text{grad } A_p$ auf σ ist durch

$$\text{grad } A_p(\sigma(s)) = d_{v+sw} \exp_p \cdot (v + sw) = \partial_t \Gamma(s, 1).$$

gegeben. Also

$$\begin{aligned} (\nabla_u \text{grad } A_p)(\sigma(0)) &= (\sigma \nabla_{\partial_s} \partial_t \Gamma(\cdot, 1))(0) = (\Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_t \Gamma)(0, 1) = (\Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma)(0, 1) \\ &= (\gamma^v \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma(0, \cdot))(1) \\ &= \dot{J}_{v,w}(1). \end{aligned}$$

Dann

$$H(A_p)_q(u, u) = g_q(\nabla_u \text{grad } A_p, u) = g_q(\dot{J}_{v,w}(1), J_{v,w}(1)). \quad (8.18)$$

Nach der ersten Ungleichung in (8.16) finden wir

$$H(A_p)_q(u, u) = g_q(\dot{J}_{v,w}(1), J_{v,w}(1)) \geq g_q(J_{v,w}(1), J_{v,w}(1)) = g_q(u, u). \quad \square$$

Als Folgerung können wir den Kosinussatz für CH-Mannigfaltigkeiten formulieren.

Satz 8.20 (Kosinussatz). *Es sei (M, g) eine CH-Mannigfaltigkeit. Wir betrachten ein geodätisches 3-Eck mit Ecken $p_1, p_2, p_3 \in M$ und inneren Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Dann*

$$d_g(p_2, p_3)^2 \geq d_g(p_1, p_2)^2 + d_g(p_1, p_3)^2 - d_g(p_1, p_2)d_g(p_1, p_3) \cos \alpha_1 \quad (8.19)$$

und

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq \pi. \quad (8.20)$$

Wenn p_1, p_2, p_3 nicht kollinear sind und $K < 0$, dann sind die obigen Ungleichungen strikt.

Beweis. Es sei $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ die Geodätische von p_1 nach p_3 , sodass

$$|\dot{\gamma}_v(t)| = |v| = d_g(p_1, p_3), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Nach Aufgabe 12-2 und Hilfssatz 8.13 gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}(A_{p_2} \circ \gamma_v) = H(A_{p_2})_{\gamma_v}(\dot{\gamma}_v, \dot{\gamma}_v) \geq |\dot{\gamma}_v|^2 = d_g(p_1, p_3)^2.$$

Es sei $\gamma_u : [0, 1] \rightarrow M$ die Geodätische von p_2 nach p_1 , sodass $\text{grad } A_{p_2}(p_1) = \dot{\gamma}_u(1)$. Dann impliziert die Ungleichung $\frac{d^2}{dt^2}(A_{p_2} \circ \gamma_v) \geq d_g(p_1, p_3)^2$ die Abschätzung

$$A_{p_2}(\gamma_v(t)) \geq A_{p_2}(\gamma_v(0)) + g(\dot{\gamma}_v(0), \dot{\gamma}_u(1))t + \frac{t^2}{2}d_g(p_1, p_3)^2. \quad (8.21)$$

Der erste Term ist $A_{p_2}(\gamma_v(0)) = \frac{1}{2}d_g(p_2, p_1)^2$, während der zweite Term

$$g(\dot{\gamma}_v(0), \dot{\gamma}_u(1)) = |v||\dot{\gamma}_u(1)| \cos(\theta_1) = -d_g(p_1, p_3)d_g(p_1, p_2) \cos \alpha_1$$

ist. Wenn wir diese Identitäten in Gleichung (8.21) für $t = 1$ einsetzen, bekommen wir die Ungleichung (8.19).

Es seien nun drei Punkte p'_1, p'_2, p'_3 auf \mathbb{R}^2 , sodass

$$d_{g_{\mathbb{R}^2}}(p'_i, p'_j) = d_g(p_i, p_j), \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

Solche Punkte existieren, da die Größen $d_g(p_i, p_j)$ der 3-Ecksungleichung zyklisch genügen. Es seien $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ die Innenwinkel des euklidischen 3-Ecks mit Ecken p'_1, p'_2, p'_3 . Dann gilt $\alpha'_i \geq \alpha_i$ für alle $i = 1, 2, 3$. Denn

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &\geq \frac{d_g(p_1, p_2)^2 + d_g(p_1, p_3)^2 - d_g(p_2, p_3)^2}{d_g(p_1, p_2)d_g(p_1, p_3)} = \frac{d_{g_{\mathbb{R}^2}}(p'_1, p'_2)^2 + d_{g_{\mathbb{R}^2}}(p'_1, p'_3)^2 - d_{g_{\mathbb{R}^2}}(p'_2, p'_3)^2}{d_{g_{\mathbb{R}^2}}(p'_1, p'_2)d_{g_{\mathbb{R}^2}}(p'_1, p'_3)} \\ &= \cos \alpha'_1, \end{aligned}$$

wobei wir den Kosinussatz für Dreiecke in \mathbb{R}^2 benutzt haben. Nun ist die Kosinusfunktion streng monoton fallend, sodass $\cos \alpha_i \geq \cos \alpha'_i \Rightarrow \alpha_i \leq \alpha'_i$. Schließlich

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 = \pi,$$

wobei wir benutzt haben, dass die Summe der inneren Winkel eines euklidischen 3-Ecks gleich π ist. \square

Folgerung 8.21. *Es sei (M, g) eine CH-Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in M$ und $v_2, v_3 \in T_p M$ gilt*

$$d_g(\exp_p(v_2), \exp_p(v_3)) \geq |v_3 - v_2|.$$

Wenn $K < 0$ und v_3 nicht parallel zu v_2 steht, dann ist die Ungleichung strikt.

Beweis. Es sei $p_1 := p$, $p_2 := \exp_p(v_2)$ und $p_3 := \exp_p(v_3)$. Sei $\alpha_1 = \frac{g_{p_1}(v_2, v_3)}{|v_2||v_3|}$ der innere Winkel in p_1 . Dann gilt

$$d_g(p_2, p_3)^2 \geq |v_2|^2 + |v_3|^2 - |v_2||v_3| \cos \alpha_1 = |v_3 - v_2|^2,$$

wobei wir Ungleichung (8.19) und den euklidischen Kosinussatz für den Vektorraum $(T_p M, g_p)$ benutzt haben. \square

Folgerung 8.22. *Es sei (M, g) eine CH-Mannigfaltigkeit. Es gilt für die inneren Winkel des 4-Ecks mit vier nicht kollinearen Punkten $p_1, p_2, p_3, p_4 \in M$ als Ecken*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 2\pi \quad (8.22)$$

und die Ungleichung ist strikt, falls $K < 0$.

Beweis. Wir wenden den Satz 8.20 auf die zwei 3-Ecke die p_1, p_2, p_3 und p_3, p_4, p_1 verbinden. Dann

$$\alpha'_1 + \alpha_2 + \alpha'_3 \leq \pi, \quad \alpha''_3 + \alpha_4 + \alpha''_1 \leq \pi. \quad (8.23)$$

Nach Aufgabe 12-1 wissen wir auch, dass $\alpha_1 \leq \alpha'_1 + \alpha''_1$ und $\alpha_3 \leq \alpha'_3 + \alpha''_3$. Deswegen folgt (8.22), wenn wir die Ungleichungen in (8.23) zusammen summieren. \square

8.6 Der Satz von Cartan

Satz 8.23 (Cartan). *Es sei (M, g) eine CH-Mannigfaltigkeit und sei $F : M \rightarrow M$ eine Isometrie, sodass $F^m = \text{id}_M$ für eine natürliche Zahl $m > 0$. Dann besitzt F einen Fixpunkt $p_0 \in M$. Also gilt $F(p_0) = p_0$.*

Beweis. Da F eine Isometrie ist, gilt für alle $p \in M$:

$$A_{F(p)} \circ F(q) = \frac{1}{2} d_g(F(p), F(q))^2 = \frac{1}{2} d_g(p, q) = D_p(q), \quad \forall q \in M.$$

Es sei nun $p \in M$ beliebig und man betrachte die Funktion

$$f : M \rightarrow [0, \infty), \quad f := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m A_{F^i(p)}.$$

Da $F^0 = \text{id}_M = F^m$ finden wir, dass

$$f \circ F = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} A_{F^i(p)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m A_{F^i(p)} = f. \quad (8.24)$$

Nach Hilfssatz (8.19) ist $H(f) > 0$ positiv definit. Außerdem ist f eigentlich, da $f^{-1}([0, c]) \subset \bar{B}_{\sqrt{2c}}(p)$ für alle $c > 0$ und $\bar{B}_{\sqrt{2c}}(p)$ ist kompakt nach dem Satz von Hopf–Rinow. Aus Aufgabe 12-2 wissen wir, dass f einen eindeutigen minimierenden Punkt $p_0 \in M$ besitzt. Nach (8.24) ist aber $F(p_0)$ auch einen minimierenden Punkt für f . Also $F(p_0) = p_0$. \square

Folgerung 8.24. *Es sei (M, g) eine vollständige R-Mannigfaltigkeit mit nicht positiver Krümmung. Dann besitzt die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ kein Element $\alpha \neq 1$ mit endlicher Ordnung: d.h. existiert eine natürliche Zahl $m > 0$ mit $\alpha^m = 1$.*

Beweis. Es sei $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ die Riemannsche universelle Überlagerung. Dann ist (\tilde{M}, \tilde{g}) eine CH-Mannigfaltigkeit. Es sei nun $\alpha \in \pi_1(M)$ ein Element mit $\alpha^m = 1$ für ein $m > 0$. Da wir den Gruppenisomorphismus $\pi_1(M) \cong \text{Deck}(\pi)$ haben, können wir α als eine Decktransformation betrachten, für die $\alpha^m = \text{id}_{\tilde{M}}$. Dann besitzt α einen Fixpunkt. Die einzige Decktransformation mit Fixpunkten ist aber die Identität. Also $\alpha = \text{id}_{\tilde{M}}$. \square

Bemerkung 8.25. Die Smith-Theorie (P. A. Smith, *Transformations of finite period*, Annals Mathematics) zeigt, dass \mathbb{R}^n keine freie Wirkung einer endlichen Gruppe zulässt. Das heißt, dass keine Mannigfaltigkeit M existiert, sodass $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ und $\pi_1(M)$ Elemente endlicher Ordnung besitzt. In diesem Sinn ist der Fixpunkt-Satz von Cartan nicht so nützlich, wenn wir schon aus dem Satz von Cartan–Hadamard wissen, dass $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$. Der Fixpunkt-Satz von Cartan kann aber benutzt werden, um ein wichtiges Resultat der Theorie der Lie-Gruppen zu beweisen: die maximale kompakte Untergruppe einer halbeinfachen Lie-Gruppe ist eindeutig bis auf Konjugation. \triangle

Im nächsten Abschnitt werden wir mehr Informationen über die Fundamentalgruppe von (M, g) erhalten, falls $K < 0$.

8.7 Der Satz von Preissmann (nicht klausurrelevant)

Das Ziel dieses Abschnitts ist das folgende Resultat zu beweisen.

Satz 8.26 (Preissmann). *Es sei (M, g) eine vollständige R-Mannigfaltigkeit mit $K < 0$. Dann sind alle nicht triviale abelsche Untergruppen von $\pi_1(M)$ isomorph zu \mathbb{Z} .*

Als unmittelbare Folgerung bekommen wir das folgende Resultat.

Folgerung 8.27. *Es seien M_1, M_2 Mannigfaltigkeiten, sodass $\pi_1(M_1) \neq 0$ und $\pi_1(M_2) \neq 0$. Dann lässt $M_1 \times M_2$ keine vollständige Riemannsche Metrik negativer Krümmung. Insbesondere besitzt der Torus \mathbb{T}^n keine Riemannsche Metrik negativer Krümmung.*

Beweis. Es gilt $\pi_1(M_1 \times M_2) = \pi_1(M_1) \times \pi_1(M_2)$. Es sei $a_1 \in \pi_1(M_1)$, $a_1 \neq 1$ und $a_2 \in \pi_1(M_2)$, $a_2 \neq 1$. Es sei angenommen, dass die Gruppe $G := \{(a_1^{m_1}, a_2^{m_2}) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ isomorph zu \mathbb{Z} ist. Dann existiert $(b_1, b_2) \in G$, sodass $m \mapsto (b_1^m, b_2^m)$ ein Isomorphismus von \mathbb{Z} nach G ist. Es existiert $m_1 \neq 0$, sodass $(b_1^{m_1}, b_2^{m_1}) = (1, a_2)$ und $m_2 \neq 0$, sodass $(b_1^{m_2}, b_2^{m_2}) = (a_1, 1)$. Dann bekommen wir den Widerspruch

$$(b_1^{m_1 m_2}, b_2^{m_1 m_2}) = (1, 1). \quad \square$$

Um den Satz von Preissmann zu beweisen, ist es nützlich den Begriff der Achse einer Isometrie einzuführen.

Definition 8.28. Es sei $F : (M, g) \rightarrow (M, g)$ eine Isometrie. Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ ist eine Achse für F , falls ein $d \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$F \circ \gamma(t) = \gamma(t + d), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

Die Zahl d ist dann eine Periode von γ bezüglich F .

Bemerkung 8.29. Die Periode d ist eindeutig definiert, falls $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ injektiv ist, da $\gamma(t + d) = \gamma(t + d')$ die Gleichung $d = d'$ impliziert. \triangle

In manchen Fällen können wir die Existenz einer Achse beweisen.

Hilfssatz 8.30. Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $F : (M, g) \rightarrow (M, g)$ eine Isometrie ohne Fixpunkte. Es sei angenommen, dass ein $p_0 \in M$ und eine Umgebung U von p_0 existieren, sodass

$$d := d_g(p_0, F(p_0)) \leq d_g(p, F(p)), \quad \forall p \in U.$$

Es sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, sodass $\gamma|_{[0, d]}$ die minimierende Geodätische von p_0 nach $F(p_0)$ ist. Dann gilt $d_p F \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(d)$, sodass γ eine Achse für F mit Periode d ist.

Beweis. Es sei $\delta := F \circ \gamma$, sodass $\delta(0) = \gamma(d)$ und $\dot{\delta}(0) = d_p F \cdot \dot{\gamma}(0)$. Wir nehmen $\epsilon > 0$ klein genug, sodass $\gamma(\epsilon) \in U$ und betrachten die Verkettung $\gamma_1 := \gamma|_{[\epsilon, d]} * \delta|_{[0, \epsilon]}$. Dann verbindet γ_1 $p := \gamma(\epsilon)$ mit $\delta(\epsilon) = F(\gamma(\epsilon)) = F(p)$. Daher

$$\begin{aligned} d_g(p, F(p)) &\leq L_g(\gamma_1) = L_g(\gamma|_{[\epsilon, d]}) + L_g(\delta|_{[0, \epsilon]}) = L_g(\gamma|_{[\epsilon, d]}) + L_g(F \circ \gamma|_{[0, \epsilon]}) \\ &= L_g(\gamma|_{[\epsilon, d]}) + L_g(\gamma|_{[0, \epsilon]}) \\ &= L_g(\gamma|_{[0, d]}) \\ &= d_g(p_0, F(p_0)) \\ &\leq d_g(p, F(p)). \end{aligned}$$

Es folgt, dass $L_g(\gamma_1) = d(p, F(p))$. Das heißt, dass γ_1 die Länge in der Klasse von Kurven von p nach $F(p)$ minimiert. Daher ist γ_1 eine Geodätische und muss insbesondere glatt für $t = d$ sein, was $d_p F \cdot \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(d)$ impliziert. Dann sind $t \mapsto \gamma(t + d)$ und $t \mapsto F \circ \gamma(t)$ zwei Geodätischen mit selbem Tangentialvektor in $t = 0$. Sie müssen also übereinstimmen: $\gamma(t + d) = F \circ \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. \square

Wir sehen nun, dass auf CH-Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung Achsen eindeutig sind.

Satz 8.31. Es sei (M, g) eine CH-Mannigfaltigkeit mit $K < 0$. Es $F : (M, g) \rightarrow (M, g)$ eine Isometrie ohne Fixpunkte. Es seien $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow M$ zwei Achsen für F . Dann gilt $\gamma_1 = \gamma_2$ bis auf Unparametrisierung.

Beweis. Es sei angenommen, dass γ_2 keine Unparametrisierung von γ_1 ist. Wenn ein Punkt $p \in \gamma_1(\mathbb{R}) \cap \gamma_2(\mathbb{R})$ existieren würde, hätten wir $F(p) \in \gamma_1(\mathbb{R}) \cap \gamma_2(\mathbb{R})$ und $F(p) \neq p$. Also γ_1 und γ_2 besitzen mehr als einen Schnittpunkt, was die Injektivität von \exp_p widerspricht. Es seien nun $p_1 = \gamma_1(t_1)$ und $p_2 \in \gamma_2(t_2)$ beliebig und sei $\delta : [0, 1] \rightarrow M$ die Geodätische von p_1 nach p_2 . Dann ist $F \circ \delta : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische von $F(p_1)$ nach $F(p_2)$. Da F eine Isometrie ist, sind die Winkel zwischen δ und γ_i und zwischen $F \circ \delta$ und γ_i gleich für $i = 1, 2$. Das heißt, dass die Summe der inneren Winkel des geodätischen 4-Ecks mit Ecken $p_1, p_2, F(p_1), F(p_2)$ gleich $\pi + \pi = 2\pi$ ist, was die Folgerung (8.22) widerspricht. \square

Wir können nun die Existenz von Achsen für nicht triviale Decktransformationen in der universellen Überlagerung kompakter Riemannscher Mannigfaltigkeiten beweisen.

Hilfssatz 8.32. *Es sei (M, g) eine kompakte Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ und $F : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ eine Decktransformation mit $F \neq \text{id}_{\tilde{M}}$. Dann existiert eine Achse für F .*

Beweis. Es seien $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1 \in \tilde{M}$ und $\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1 : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ beliebig, sodass $\tilde{\delta}_i(0) = \tilde{p}_i$ und $\tilde{\delta}_i(1) = F(\tilde{p}_i)$ für $i = 0, 1$. Wir behaupten, dass die Kurven $\delta_0 := \pi \circ \tilde{\delta}_0$ und $\delta_1 := \pi \circ \tilde{\delta}_1$ geschlossen und frei-homotop zueinander sind. Es sei dazu $\tilde{\epsilon} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ eine Kurve mit $\tilde{\epsilon}(0) = \tilde{p}_0$ und $\tilde{\epsilon}(1) = \tilde{p}_1$. Wir schreiben $\bar{\epsilon} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ für die rückwärts parametrisierte Kurve $\bar{\epsilon}(t) = \tilde{\epsilon}(1 - t)$ für $t \in [0, 1]$. Dann sind $\tilde{\delta}_0$ und $\tilde{\epsilon} * \tilde{\delta}_1 * \bar{\epsilon}$ homotop zueinander, da \tilde{M} einfach zusammenhängend ist und $\tilde{\delta}_0(i) = \tilde{\epsilon} * \tilde{\delta}_1 * \bar{\epsilon}(i)$ für $i = 0, 1$. Es folgt, dass δ_0 und $\epsilon * \delta_1 * \bar{\epsilon}$ homotop zueinander sind. Wenn wir den Basispunkt verschieben, sehen wir, dass $\epsilon * \delta_1 * \bar{\epsilon}$ frei homotop zu $\delta_1 * \bar{\epsilon} * \epsilon$ ist und schließlich ist $\delta_1 * \bar{\epsilon} * \epsilon$ homotop zu δ_1 . Die Behauptung ist gezeigt.

Es sei nun α die freie Homotopie-Klasse von $\delta := \pi \circ \tilde{\delta}$, wobei $\tilde{\delta}$ einen beliebigen $\tilde{p} \in \tilde{M}$ mit $F(\tilde{p})$ verbindet. Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve in der Klasse α . Wir behaupten, dass eine Hochhebung $\tilde{\gamma}$ von γ existiert, sodass $\tilde{\gamma}(1) = F(\tilde{\gamma}(0))$. Es sei dazu $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow M$ eine Homotopie durch geschlossene Kurven mit $\Gamma(0, \cdot) = \delta$ und $\Gamma(1, \cdot) = \gamma$. Insbesondere $\Gamma(s, 0) = \Gamma(s, 1)$ für alle $s \in [0, 1]$ und wir bezeichnen $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ für die Kurve $\sigma(s) := \Gamma(s, 0) = \Gamma(s, 1)$.

Es sei $\tilde{\Gamma} : [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{M}$ die eindeutige Hochhebung von Γ , sodass $\tilde{\Gamma}(0, \cdot) = \tilde{\delta}$. Dann ist $\tilde{\Gamma}(1, \cdot)$ eine Hochhebung von γ und wir zeigen jetzt, dass $F(\tilde{\Gamma}(1, 0)) = \tilde{\Gamma}(1, 1)$. Die Kurven $s \mapsto \tilde{\Gamma}(s, 0)$ und $s \mapsto \tilde{\Gamma}(s, 1)$ sind Hochhebungen der Kurve σ . Da F eine Decktransformation ist, ist auch $s \mapsto F \circ \tilde{\Gamma}(s, 0)$ eine Hochhebung der Kurve σ . Es gilt aber $F \circ \tilde{\Gamma}(0, 0) = F(\tilde{\delta}(0)) = \tilde{\delta}(1) = \tilde{\Gamma}(1, 0)$. Das heißt, dass $F \circ \tilde{\Gamma}(\cdot, 0)$ und $\tilde{\Gamma}(\cdot, 1)$ die Kurve σ hochheben und stimmen für $s = 0$ überein. Nach der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt, dass $F \circ \tilde{\Gamma}(\cdot, 0) = \tilde{\Gamma}(\cdot, 1)$. Für $s = 1$ bekommen wir die gewünschte Gleichung $F(\tilde{\Gamma}(1, 0)) = \tilde{\Gamma}(1, 1)$.

Wir können nun die Existenz einer Achse für F zeigen. Es sei $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, sodass $\gamma_0|_{[0, d]}$ eine geschlossene Kurve ist, welche die Länge in der Klasse α minimiert. Es sei $\tilde{\gamma}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ eine Hochhebung von γ_0 , sodass $\tilde{\gamma}_0(1) = F(\tilde{\gamma}_0(d))$. Für alle $\tilde{q} \in \tilde{M}$ sei $\tilde{\gamma} : [0, d] \rightarrow \tilde{M}$ die minimierende Geodätische zwischen

\tilde{q} und $F(\tilde{q})$. Dann ist $\pi \circ \tilde{\gamma}$ eine Kurve in der Klasse α und gilt

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{q}, F(\tilde{q})) = L_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}) = L_g(\pi \circ \gamma) \geq L_g(\gamma_0|_{[0,d]}) = L_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_0|_{[0,d]}) \geq d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_0(0), F(\tilde{\gamma}_0(d))).$$

Es folgt, dass $\tilde{\gamma}_0|_{[0,d]}$ eine minimierende Kurve zwischen $\tilde{p}_0 := \tilde{\gamma}_0(0)$ und $F(\tilde{p}_0)$ ist und dass \tilde{p}_0 die Funktion $\tilde{q} \mapsto d_{\tilde{g}}(\tilde{q}, F(\tilde{q}))$ minimiert. Nach Hilfssatz 8.30 ist $\tilde{\gamma}_0$ eine Achse für F . \square

Wir sind nun bereit den Satz von Preissmann zu beweisen.

Beweis von Satz 8.26. Es sei \mathcal{G} eine nicht triviale abelsche Untergruppe von $\pi_1(M)$, die wir als Untergruppe der Gruppe der Decktransformationen betrachten. Es sei $F_0 \in \mathcal{G}$, $F_0 \neq \text{id}_{\tilde{M}}$ ein beliebiges Element und sei γ_0 die eindeutige Achse von F_0 mit Periode $d(F_0)$. Wenn wir ein zusätzliches $F \in \mathcal{G}$, $F \neq \text{id}_{\tilde{M}}$ nehmen, behaupten wir, dass γ_0 auch eine Achse für G ist. Sei $\gamma := F \circ \gamma_0$, dann

$$F_0 \circ \gamma(t) = F_0 \circ F \circ \gamma_0(t) = F \circ F_0 \circ \gamma_0(t) = F \circ \gamma_0(t + d(F_0)) = \gamma(t + d(F_0)).$$

Also ist γ auch eine Achse für F_0 . Da die Achse eindeutig bis auf Unparametrisierung ist, folgt, dass $\gamma_0(\pm t + d(F)) = \gamma(t) = F \circ \gamma_0(t)$ für ein $d(F) \in \mathbb{R}$. Wäre aber $F \circ \gamma_0(t) = \gamma_0(-t + d(F))$, hätte F den Fixpunkt $\gamma(d(F)/2)$. Da die einzige Decktransformation mit Fixpunkten die Identität ist, sehen wir, dass $F \circ \gamma_0(t) = \gamma_0(t + d(F))$ und γ_0 ist eine Achse für F mit Periode $d(F)$. Wir definieren nun die Funktion $d : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $F \mapsto d(F)$, wobei wir $d(\text{id}_{\tilde{M}}) := 0$ setzen. Es ist leicht zu sehen, dass d ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Da $\gamma_0(0)$ eine Umgebung U besitzt, sodass $F(U) \cap U = \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{G} \setminus \{\text{id}_{\tilde{M}}\}$ gilt, ist $d(\mathcal{G})$ eine diskrete Untergruppe von \mathbb{R} . Diskrete und nicht triviale Untergruppen von \mathbb{R} sind aber isomorph zu \mathbb{Z} . Es folgt, dass $\mathcal{G} \cong d(\mathcal{G}) \cong \mathbb{Z}$. \square

8.8 Erste und zweite Variation der Länge

Um der Einfluss positiver Krümmung auf die Topologie zu studieren, analysieren wir die Variation der Länge entlang Familien von Kurven.

Satz 8.33 (Erste Variation der Länge). *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M_0, M_1 \subset M$ zwei Untermannigfaltigkeiten. Es sei $\gamma \in \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\Gamma \subset \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ eine beliebige Familie von Kurven durch γ . Dann*

$$\frac{dL_g(\gamma_s)}{ds} = \int_0^1 \frac{g_{\Gamma(s,t)}(\Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma(s,t), \partial_t \Gamma(s,t))}{|\partial_t \Gamma(s,t)|} dt \quad (8.25)$$

und für $s = 0$ finden wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL_g(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} &= d_\gamma L_g \cdot X^\Gamma := - \int_0^1 g_{\gamma(t)}(X^\Gamma(t), \gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma}(t)) dt \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-1} g_{\gamma(t_j)}(X^\Gamma(t_j), \Delta \dot{\gamma}(t_j)) \\ &\quad + g_{\gamma(1)}(X^\Gamma(1), \dot{\gamma}(1)) - g_{\gamma(0)}(X^\Gamma(0), \dot{\gamma}(0)). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Insbesondere $\frac{d(L_g(\gamma_s))}{ds}\Big|_{s=0} = 0$ für alle Familien $\Gamma \subset \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ durch γ genau dann, wenn $d_\gamma L_g \cdot X = 0$ für alle $X \in \Gamma(\gamma TM)_{M_0, M_1}$. Das passiert genau dann, wenn γ eine Geodätische mit $\dot{\gamma}(i) \perp T_{\gamma(i)}M_i$ für $i = 0, 1$ ist.

Beweis. Da die Länge additiv unter Verkettung ist, haben wir

$$\frac{dL_g(\gamma_s)}{ds} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{dL_g(\gamma_s|_{[t_j, t_{j+1}]})}{ds}.$$

Da $\Gamma|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_j, t_{j+1}]}$ glatt ist, kann die Ableitung nach s in das Integral für alle $j = 1, \dots, k-1$ hereingezogen werden:

$$\begin{aligned} \frac{dL_g(\gamma_s|_{[t_j, t_{j+1}]})}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sqrt{g_\Gamma(\partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma)} dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{g_\Gamma(\partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma)} dt \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{2g_\Gamma(\Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma)}{2\sqrt{g_\Gamma(\partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma)}} dt \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{g_\Gamma(\Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma)}{\sqrt{g_\Gamma(\partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma)}} dt, \end{aligned}$$

wobei wir die Symmetrie und die Verträglichkeit mit der Metrik von ∇ benutzt haben. Wenn wir über j summieren, bekommen wir Formel (8.25). Wir setzen nun $s = 0$ und formen den Integrand um:

$$g_\Gamma(\Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma|_{s=0}, \dot{\gamma}) = g_\Gamma(\gamma \nabla_{\partial_t} X^\Gamma, \dot{\gamma}) = \frac{d}{dt} (g_\Gamma(X^\Gamma, \dot{\gamma})) - g_\Gamma(X^\Gamma, \gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma}),$$

wobei wir die Verträglichkeit von ∇ mit der Metrik benutzt haben. Wir summieren jetzt über j und benutzen wir den Fundamentalsatz der Integralrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{dL_g(\gamma_s)}{ds}\Big|_{s=0} &= \sum_{j=0}^{k-1} \left[g_\Gamma(X^\Gamma(t_{j+1}), \dot{\gamma}^-(t_{j+1})) - g_\Gamma(X^\Gamma(t_j), \dot{\gamma}^+(t_j)) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} g_\Gamma(X^\Gamma, \gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma}) dt \right] \\ &= \sum_{j=1}^k g_\Gamma(X^\Gamma(t_j), \dot{\gamma}^-(t_j)) - \sum_{j=0}^{k-1} g_\Gamma(X^\Gamma(t_j), \dot{\gamma}^+(t_j)) - \int_0^1 g_\Gamma(X^\Gamma, \gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma}) dt. \end{aligned}$$

Eine leichte Bearbeitung der zwei Summierungen liefert Formel (8.26).

Nach Hilfssatz 8.4 ist die Bedingung $\frac{d(L_g(\gamma_s))}{ds}\Big|_{s=0} = 0$ für alle Familien $\Gamma \subset \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ durch γ äquivalent zur Bedingung $d_\gamma L_g \cdot X = 0$ für alle $X \in \Gamma(\gamma TM)_{M_0, M_1}$.

Wenn γ eine Geodätische mit $\dot{\gamma}(i) \perp T_{\gamma(i)}M_i$ für $i = 0, 1$ ist, dann verschwinden alle Terme in $d_\gamma L_g \cdot X$: der Erste weil γ eine Geodätische ist, der Zweite, weil γ glatt ist und der Dritte und Dierte, da $\dot{\gamma}(i) \perp T_{\gamma(i)}M_i \ni X(i)$ für $i = 0, 1$.

Es sei umgekehrt angenommen, dass $d_\gamma L_g \cdot X = 0$ für alle $X \in \Gamma(\gamma TM)_{M_0, M_1}$. Es sei $t \neq t_j$ für $j = 0, \dots, k$. Wir nehmen eine Funktion $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, sodass $\rho(t) = 1$ und $T(\rho) \cap \{t_0, \dots, t_k\} = \emptyset$. Dann $X_t := \rho \cdot \gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} \in \Gamma(\gamma TM)_{M_0, M_1}$ und

$$0 = d_\gamma L_g \cdot X_t = - \int_{T(\rho)} \rho |\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma}|^2 dt$$

impliziert, dass ${}^\gamma\nabla_{\partial_t}\dot{\gamma}(t) = 0$. Also ist γ stückweise geodätisch. Sei nun $j = 1, \dots, k-1$ fest und sei X_j ein Vektorfeld entlang γ , sodass $X_j(t_j) = \Delta\dot{\gamma}(t_j)$ und $X_j(t_i) = 0$ für $i \neq j$ (warum existiert X_j ?). Dann ist $X_j \in \Gamma({}^\gamma TM)_{M_0, M_1}$ (warum?) und gilt

$$0 = d_\gamma L_g \cdot X_j = -|\Delta\dot{\gamma}(t_j)|^2.$$

Es folgt $\Delta\dot{\gamma}(t_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, k-1$ und γ ist glatt und daher eine Geodätische. Sei nun $v \in T_{\gamma_0}M_0$ beliebig und X_v ein Vektorfeld entlang γ , sodass $X_v(0) = v$ und $X_v(1) = 0$. Dann ist $X_v \in \Gamma({}^\gamma TM)_{M_0, M_1}$ und

$$0 = d_\gamma L_g \cdot X_v = -g_{\gamma(0)}(v, \dot{\gamma}(0)).$$

Da v beliebig war, folgt, dass $\dot{\gamma}(0) \perp T_{\gamma(0)}M_0$. Auf ähnlicher Weise sehen wir, dass $\dot{\gamma}(1) \perp T_{\gamma(1)}M_1$. \square

Im obigen Satz haben wir das Folgende gesehen. Eine Kurve $\gamma \in \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ ist eine Geodätische, die orthogonal an den Endpunkten zu M_0 und M_1 steht, genau dann, wenn die Funktion $s \mapsto L_g(\gamma_s)$ einen kritischen Punkt für $s = 0$ und alle Familien $\Gamma \subset \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ durch γ besitzt.

Es sei dann angenommen, dass γ eine Geodätische ist, die orthogonal an den Endpunkten zu M_0 und M_1 steht. Um das Verhalten der Funktion $s \mapsto L_g(\gamma_s)$ in einer Umgebung von $s = 0$ in diesem Fall zu verstehen, müssen wir daher die zweite Ableitung von $s \mapsto L_g(\gamma_s)$ in $s = 0$ berechnen. Für $V \in \Gamma({}^\gamma TM)$ führen wir die Notation

$$V_\perp := V - g_\gamma(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

für die orthogonale Projektion auf $\dot{\gamma}^\perp$ ein.

Satz 8.34 (Zweite Variation der Länge). *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M_0, M_1 \subset M$ zwei Untermannigfaltigkeiten. Es sei $\gamma \in \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, sodass $\dot{\gamma}(i) \perp T_{\gamma(i)}M_i$ für $i = 0, 1$ ist. Für eine beliebige Familie von Kurven $\Gamma \subset \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ durch γ gilt*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 L_g(\gamma_s)}{ds^2} \right|_{s=0} &= H(L_g)_\gamma(X^\Gamma, X^\Gamma) := \int_0^1 \left[|(\dot{X}^\Gamma)_\perp|^2 - R(X_\perp^\Gamma, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, X_\perp^\Gamma) \right] dt \\ &+ g_{\gamma(1)}(II_{M_1}(X^\Gamma(1), X^\Gamma(1)), \dot{\gamma}(1)) \\ &- g_{\gamma(0)}(II_{M_0}(X^\Gamma(0), X^\Gamma(0)), \dot{\gamma}(0)), \end{aligned} \quad (8.27)$$

wobei II_{M_i} die zweite Fundamentalform von M_i für $i = 0, 1$ ist. Wenn M_0 und M_1 total geodätisch sind, gilt daher

$$\left. \frac{d^2 L_g(\gamma_s)}{ds^2} \right|_{s=0} = H(L_g)_\gamma(X^\Gamma, X^\Gamma) = \int_0^1 \left[|(\dot{X}^\Gamma)_\perp|^2 - R(X_\perp^\Gamma, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, X_\perp^\Gamma) \right] dt. \quad (8.28)$$

Beweis. Wir leiten den Integrand in (8.25) nochmal nach s in $s = 0$ ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{g_\Gamma(\Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma)}{|\partial_t \Gamma|} &= g_\gamma(\Gamma \nabla_{\partial_s} \Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma, \dot{\gamma}) + g_\gamma(\Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma, \Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_t \Gamma) \\ &\quad - g_\gamma(\Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma, \dot{\gamma}) g_\gamma(\Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_t \Gamma, \dot{\gamma}) \\ &= g_\gamma(\Gamma \nabla_{\partial_s} \Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma, \dot{\gamma}) + |\dot{X}^\Gamma|^2 - g_\gamma(\dot{X}^\Gamma, \dot{\gamma})^2 \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $|\partial_t \Gamma(0, \cdot)| = |\dot{\gamma}| = 1$ und dass ∇ symmetrisch ist. Der zweite und dritte Term geben uns $|\dot{X}_\perp^\Gamma|^2$. Der erste Term ist nach der Definition der Krümmung und der Verträglichkeit mit der Metrik gleich zu

$$\begin{aligned} g_\gamma(\Gamma \nabla_{\partial_s} \Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma, \dot{\gamma}) &= R_\gamma(X^\Gamma, \dot{\gamma}, X^\Gamma, \dot{\gamma}) + g_\gamma(\Gamma \nabla_{\partial_t} \Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_s \Gamma, \dot{\gamma}) \\ &= -R(X_\perp^\Gamma, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, X_\perp^\Gamma) + \frac{d}{dt} g_\gamma(\Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_s \Gamma, \dot{\gamma}). \end{aligned}$$

Alles zusammenfassend haben wir die Formel

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{g_\Gamma(\Gamma \nabla_{\partial_t} \partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma)}{|\partial_t \Gamma|} = -R(X_\perp^\Gamma, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, X_\perp^\Gamma) + \frac{d}{dt} g_\gamma(\Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_s \Gamma, \dot{\gamma}) + |\dot{X}_\perp^\Gamma|^2$$

gefunden. Wir integrieren die Formel auf $[0, 1]$ und bekommen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L_g(\gamma_s)}{ds^2} \Big|_{s=0} &= \int_0^1 \left[|\dot{X}_\perp^\Gamma|^2 - R(X_\perp^\Gamma, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, X_\perp^\Gamma) \right] dt \\ &\quad + g_{\gamma(1)}(\Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_s \Gamma|_{t=1}, \dot{\gamma}(1)) - g_{\gamma(0)}(\Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_s \Gamma|_{t=0}, \dot{\gamma}(0)) \end{aligned}$$

Da $\dot{\gamma}(i) \perp T_{\gamma(i)} M_i$ für $i = 0, 1$ gilt haben wir

$$g_{\gamma(i)}(\Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_s \Gamma|_{t=i}, \dot{\gamma}(i)) = g_{\gamma(i)}(\Pi \Gamma \nabla_{\partial_s} \partial_s \Gamma|_{t=i}, \dot{\gamma}(i)) = g_{\gamma(i)}\left(\Pi_{M_i}(X^\Gamma(i), X^\Gamma(i)), \dot{\gamma}(i)\right),$$

wobei $\Pi : T_{\gamma(i)} M_i \rightarrow \mathcal{N}_{M_i}$ die orthogonale Projektion ist und wir Gleichung (6.9) benutzt haben. \square

Folgerung 8.35. *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und M_0, M_1 Untermannigfaltigkeiten. Es sei $\gamma \in \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Eigenschaft, dass*

$$L_g(\gamma) \leq L_g(\delta), \quad \forall \delta \in \mathcal{C}_{M_0, M_1}. \quad (8.29)$$

Dann ist γ eine Geodätische mit $\dot{\gamma}(i) \perp T_{\gamma(i)} M_i$ für $i = 0, 1$. Es gilt dazu

$$H(L_g)_\gamma(X, X) \geq 0, \quad \forall X \in \Gamma(\gamma TM)_{M_0, M_1}.$$

Beweis. Unter der Annahme (8.29) wissen wir, dass für alle $\Gamma \subset \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ durch γ die Funktion $s \mapsto L_g(\gamma_s)$ ein lokales Minimum in $s = 0$ besitzt. Es folgt, dass

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L_g(\gamma_s) = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L_g(\gamma_s) \geq 0.$$

Die erste Behauptung folgt dann aus Satz 8.33 und die zweite aus Satz 8.34 zusammen mit Hilfssatz 8.4. \square

Wir wollen nun diesen Abschnitt mit einer nicht klausurrelevanten Bemerkung schließen, die zeigt, wie Jacobi-Felder und die zweite Variation der Länge verbunden sind.

Folgerung 8.36. *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, M_0, M_1 zwei Untermannigfaltigkeiten und $\gamma \in \mathcal{C}_{M_0, M_1}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $\dot{\gamma}(i) \in T_{\gamma(i)}M_i^\perp$ für $i = 0, 1$. Für $X \in \Gamma(\gamma TM)_{M_0, M_1}$ mit $g(X, \dot{\gamma}) = 0$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(L_g)_\gamma(X, X) &= - \int_0^1 \left[g_\gamma(\ddot{X} + R(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, X) \right] dt - \sum_{j=1}^{k-1} g_{\gamma(t_j)}(X(t_j), \Delta \dot{X}(t_j)) \\ &\quad + g_{\gamma(1)}(X(1), \dot{X}(1)) - g_{\gamma(0)}(X(0), \dot{X}(0)) \\ &\quad + g_{\gamma(1)}(II_{M_1}(X(1), X(1)), \dot{\gamma}(1)) - g_{\gamma(0)}(II_{M_0}(X(0), X(0)), \dot{\gamma}(0)). \end{aligned}$$

Beweis. Wir substituieren $|\dot{X}_\perp|^2 = \frac{d}{dt}(g(\dot{X}, X)) - g_\gamma(\ddot{X}, X)$ in (8.27) und integrieren auf den einzelnen Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$. \square

Mit Hilfe dieser Formel für $M_0 = \{p_0\}$ und $M_1 = \{p_1\}$ kann man nun das folgende wichtige Resultat beweisen.

Folgerung 8.37. *Es sei $\gamma : [0, d] \rightarrow M$ eine Geodätische. Es sei angenommen, dass $d' < d$ und $J \in \mathcal{J}^\perp(\gamma|_{[0, d']})$ mit $J \neq 0$ existiert, sodass $J(0) = 0$ und $J(d') = 0$. Dann ist γ nicht minimierend: $L_g(\gamma) > d_g(\gamma(0), \gamma(d))$. \square*

8.9 Der Satz von Bonnet–Myers

In diesem Abschnitt werden wir drei wichtige Folgerungen der Formel für die zweite Variation für Mannigfaltigkeiten (M, g) positiver Krümmung beweisen. Die Erste ist eine Abschätzung über den Durchmesser von (M, g)

$$d(M, g) := \sup_{(p_0, p_1) \in M} d_g(p_0, p_1).$$

Nach dem Satz von Hopf–Rinow gilt:

$$d(M, g) < \infty \iff M \text{ kompakt.} \quad (8.30)$$

Satz 8.38 (Bonnet–Myers). *Es sei (M, g) eine vollständige Mannigfaltigkeit mit $\text{Ric} \geq \frac{1}{R^2}(n-1)g$ für ein $R > 0$. Dann gilt $d(M, g) \leq \pi R$. Insbesondere ist M kompakt.*

Beweis. Es seien $p_0, p_1 \in M$ beliebig und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine minimierende Geodätische von p_0 nach p_1 , sodass $|\dot{\gamma}| = d_g(p_0, p_1)$. Dann gilt

$$\mathbb{H}(L_g)_\gamma(X, X) \geq 0, \quad \forall X \in \Gamma(\gamma TM)_{p_0, p_1} = \{X \in \Gamma(\gamma TM) \mid X(0) = 0, X(1) = 0\}.$$

Es sei v_1, \dots, v_{n-1} eine orthonormale Basis von $\dot{\gamma}(0)^\perp \subset T_{\gamma(0)}M$ und sei e_1, \dots, e_{n-1} die Parallelverschiebung dieser Basis entlang γ . Dann ist $e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{1}{|\dot{\gamma}|}\dot{\gamma}$ ein paralleler orthonormaler Rahmen entlang γ . Wir definieren

$$X_i \in \Gamma(\gamma TM)_{p_0, p_1}, \quad X_i(t) := \sin(\pi t)e_i(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Dann sind $X_i(t)$ und $(\dot{X}_i)_\perp(t) = \pi \cos(\pi t)e_i(t)$ orthogonal zu $\dot{\gamma}(t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Da $M_0 = \{p_0\}$ und $M_1 = \{p_1\}$ total geodätisch sind, berechnen wir mit Hilfe der Gleichung (8.28)

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{H}(L_g)_\gamma(X_i, X_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 \left[(\pi)^2 \cos^2(\pi t) - \sin^2(\pi t) R(e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) \right] dt \\
&= (n-1)\pi^2 \int_0^1 \cos^2(\pi t) dt - \int_0^1 \sin^2(\pi t) \left[\sum_{i=1}^{n-1} R(e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) \right] dt \\
&= \frac{(n-1)\pi^2}{2} - \int_0^1 \sin^2(\pi t) \operatorname{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt \\
&\leq \frac{(n-1)\pi^2}{2} - \int_0^1 \sin^2(\pi t) \frac{n-1}{R^2} |\dot{\gamma}|^2 dt \\
&= \frac{(n-1)}{2} \left(\pi^2 - \frac{d_g(p_0, p_1)^2}{R^2} \right).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\pi \geq d_g(p_0, p_1)/R$, was äquivalent zu $\pi R \geq d_g(p_0, p_1)$ ist. Da p_0, p_1 beliebig waren, kommen wir zur gewünschten Aussage $d(M, g) \leq \pi R$. Nach (8.30) bekommen wir, dass M kompakt ist. \square

Bemerkung 8.39. Wir können den obigen Beweis wie folgt reformulieren. Es sei (M, g) vollständig mit $\operatorname{Ric} \geq \frac{n-1}{R^2}g$. Wir nehmen eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$. Dann ist $\gamma|_{[0, d]}$ nicht mehr eine minimierende Kurve zwischen $\gamma(0)$ und $\gamma(d)$, falls $d > \pi R$. Denn für ein bestimmtes $i = 1, \dots, n-1$ sind die Kurven γ_s für $s \neq 0$, die X_i als Variationsfeld haben, kürzer als $\gamma|_{[0, d]}$. \triangle

Bemerkung 8.40. Wenn wir nur wissen, dass $\operatorname{Ric} > 0$ oder $\operatorname{skal} \geq \frac{1}{R^2}n(n-1)$ dann können wir nicht mehr schließen, dass $d(M, g)$ endlich ist. Als Gegenbeispiele können wir das Paraboloid $\{x^2 + y^2 + 1 = z^2, z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ (hier ist $K > 0$: das ist intuitiv klar aber sollte berechnet werden) und das Produkt $(S^2 \times \mathbb{R}, g_{S^2} + g_{\mathbb{R}})$ nehmen (hier ist $\operatorname{skal}_{S^2 \times \mathbb{R}} = \operatorname{skal}_{S^2} + \operatorname{skal}_{\mathbb{R}} = 2 \cdot 1 + 0 > 0$). \triangle

Bemerkung 8.41. Wenn (M, g) nicht vollständig ist, impliziert $\operatorname{Ric} \geq c(n-1)g$ die Abschätzung $d(M, g) \leq \pi R$ nicht. Man nehme $M = S^2_\gamma(C_0 \cup C_1)$ mit der eingeschränkten Metrik, wobei

$$C_0 = \{(\theta, \phi) \mid \theta = \pi/4, 0 \leq \phi \leq 3\pi/2\}, \quad C_1 = \{(\theta, \phi) \mid \theta = 3\pi/4, \pi \leq \phi \leq 5\pi/2\}.$$

Dann ist es leicht zu sehen, dass $d(M, g) > \pi$. \triangle

Bemerkung 8.42. Die Ungleichung für den Durchmesser ist optimal, da die Sphäre S^n_R besitzt Ricci-Krümmung $\frac{1}{R^2}(n-1)g_{S^n_R}$ und $d(S^n_R) = \pi R$. Ein schönes Resultat von Cheng zeigt, dass S^n_R der einzige Fall darstellt, wobei das Durchmesser genau πR ist: Wenn (M, g) vollständig mit $\operatorname{Ric} \geq \frac{1}{R^2}(n-1)g$ und $d(M, g) = \pi R$ ist, dann ist (M, g) isometrisch zu S^n_R . \triangle

Folgerung 8.43. *Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und g eine Riemannsche Metrik auf M mit $\text{Ric} > 0$. Dann besitzt M endliche Fundamentalgruppe. Es folgt, dass der Torus \mathbb{T}^n keine Metrik positiver Ricci-Krümmung zulässt.*

Beweis. Die Metrik g ist vollständig nach dem Satz von Hopf–Rinow. Wir definieren $SM := \{v \in TM \mid |v| = 1\}$. Dann ist SM kompakt, da M kompakt ist (das haben wir leider nicht bewiesen). Es folgt, dass

$$c(n-1) := \min_{v \in SM} \text{Ric}(v, v) > 0$$

und $\text{Ric} \geq c(n-1)g$. Es sei nun $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ die Riemannsche universelle Überlagerung von (M, g) . Dann ist (\tilde{M}, \tilde{g}) vollständig. Außerdem folgt, dass $\tilde{\text{Ric}} \geq \frac{1}{R^2}(n-1)$ denn π eine lokale Isometrie ist. Der Satz von Bonnet–Myers impliziert, dass \tilde{M} kompakt ist. Daher ist die Faser $\pi^{-1}(p_0)$ eine endliche Menge. Die Faser ist aber in Bijektion mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(M, p_0)$. \square

8.10 Die Sätze von Weinstein und Synge (nicht klausurrelevant)

Wir zeigen nun, dass mehr Informationen über die Fundamentalgruppe von M gewonnen werden können, wenn $K > 0$ und M ist kompakt. Dazu brauchen wir den Satz von Weinstein, der sich auf einem Lemma aus der linearen Algebra basiert.

Hilfssatz 8.44. *Es sei $A \in O(n-1)$ eine orthogonale Matrix, sodass $\det A = (-1)^n$. Dann existiert $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $A \cdot v = v$ und $|v| = 1$.*

Beweis. Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Eigenwerte von A ist, gilt $|\lambda| = 1$. Es sei $\sigma_1 \in \{0, \dots, n-1\}$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 und $\sigma_{-1} \in \{0, n-1\}$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts -1 . Dann gilt

$$n-1 \equiv \sigma_1 + \sigma_{-1} \pmod{2}, \quad \det A = (-1)^{\sigma_{-1}}. \quad (8.31)$$

Aus dieser zweiten Gleichung und der Voraussetzung folgt, dass $(-1)^n = (-1)^{\sigma_{-1}}$, was gleichbedeutend mit $n \equiv \sigma_{-1} \pmod{2}$ ist. Zusammen mit der ersten Gleichung in (8.31), folgt $\sigma_1 \equiv 1 \pmod{2}$, also $\sigma_1 \neq 0$. \square

Satz 8.45 (Weinstein). *Es sei M eine n -dimensionale, orientierte kompakte Mannigfaltigkeit und g eine Metrik auf M mit $K > 0$. Es sei $F : (M, g) \rightarrow (M, g)$ eine Isometrie, sodass*

- (i) F die Orientierung erhält, falls n gerade ist,
- (ii) F die Orientierung umkehrt, falls n ungerade ist.

Dann besitzt F einen Fixpunkt.

Beweis. Es sei per Widerspruch angenommen, dass F keinen Fixpunkt besitzt. Da M kompakt ist, besitzt die Funktion $p \mapsto d_g(p, F(p))$ ein positives Minimum. Es gibt dann $p_0 \in M$, sodass

$$d := d_g(p_0, F(p_0)) \leq d_g(p, F(p)), \quad \forall p \in M.$$

Nach Hilfssatz 8.30 existiert eine Achse $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ für F , sodass $\gamma(0) = p_0$ und $\gamma(d) = F(p_0)$ und $\gamma|_{[0,d]}$ die minimierende Geodätische zwischen p_0 und $F(p_0)$. Das heißt, dass

$$d_{p_0}F \cdot \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(d). \quad (8.32)$$

Wir behaupten, dass ein $X \in \Gamma(\gamma|_{[0,d]}TM)$ existiert, sodass

$$\dot{X} = 0, \quad |X| = 1, \quad g_\gamma(X, \dot{\gamma}) = 0, \quad d_pF \cdot X(0) = X(d). \quad (8.33)$$

Wenn das stimmt, betrachten wir die Geodätischen $\delta_0 := \gamma_{X(0)} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ und $\delta_1 := \gamma_{X(d)} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$. Wir sehen δ_0 und δ_1 als total geodätische Untermannigfaltigkeiten von M . Nach (8.33) ist $\gamma|_{[0,d]} \in \mathcal{C}_{\delta_0, \delta_1}$ eine Geodätische, die orthogonal zu δ_0 und δ_1 steht.

Es sei $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, d] \rightarrow M$ die Familie $\Gamma(s, t) = \gamma_{X(t)}(s)$ durch $\gamma|_{[0,d]}$. Dann $\Gamma(\cdot, i) = \delta_i$ für $i = 0, 1$, sodass $\Gamma \subset \mathcal{C}_{\delta_0, \delta_1}$ und $X^\Gamma = X$. Formel (8.28) liefert

$$H(L_g)_\gamma(X, X) = - \int_0^d R(X, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, X) dt = - \int_0^d K(\Pi_{X(t)\dot{\gamma}(t)}) dt < 0, \quad (8.34)$$

wobei $\Pi_{X(t)\dot{\gamma}(t)}$ die Ebene ist, die durch $X(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ aufgespannt wird. Da F eine Isometrie ist, gilt aber $\delta_1 = F \circ \delta_0$, sodass $\gamma_s(d) = \delta_1(s) = F(\delta_0(s)) = F(\gamma_s(0))$. Nach unserer Wahl von p_0 folgt

$$L_g(\gamma|_{[0,d]}) = d_g(p_0, F(p_0)) \leq d_g(\gamma_s(0), F(\gamma_s(0))) = d_g(\gamma_s(0), \gamma_s(d)) \leq L_g(\gamma_s).$$

Dann besitzt die Funktion $s \mapsto L_g(\gamma_s)$ ein Minimum in $s = 0$, sodass $\frac{d^2}{ds^2} L_g(\gamma_s)|_{s=0} \geq 0$. Wir bekommen nach Gleichung (8.28) und (8.34) den Widerspruch

$$0 > H(L_g)_\gamma(X, X) = \frac{d^2}{ds^2} L_g(\gamma_s)|_{s=0} \geq 0.$$

Wir zeigen nun die Existenz von einem Vektorfeld X , das (8.33) erfüllt. Es sei $P : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(d)}M$ die Parallelverschiebung entlang γ . Die Abbildung P erhält die Orientierung: Wenn e_1, \dots, e_n ein paralleler Rahmen entlang γ ist, sodass $e_1(0), \dots, e_n(0)$ eine positive Basis ist, dann ist die Funktion $t \mapsto \text{vol}_g(e_1(t), \dots, e_n(t))$ nirgends verschwindend und muss daher stets positiv sein.

Da F eine Isometrie ist, ist

$$\tilde{A} : T_{p_0}M \rightarrow T_{p_0}M, \quad \tilde{A} := (d_{p_0}F)^{-1}P$$

eine lineare Isometrie. Nach unserer Voraussetzung über F erhält der lineare Isomorphismus A die Orientierung, wenn n gerade ist und kehrt die Orientierung um, wenn n ungerade

ist. Das bedeutet, dass $\det \tilde{A} = (-1)^n$. Nach (8.32) ist $\dot{\gamma}(0)$ einen Eigenvektor von \tilde{A} mit Eigenwert 1:

$$\tilde{A} \cdot \dot{\gamma}(0) = (d_{p_0} F)^{-1} \circ P \cdot \dot{\gamma}(0) = (d_{p_0} F)^{-1} \cdot \dot{\gamma}(d) = \dot{\gamma}(0).$$

Wir bekommen die eingeschränkte lineare Isometrie $A : \dot{\gamma}(0)^\perp \rightarrow \dot{\gamma}(0)^\perp$ mit der Eigenschaft, dass $\det A = \det \tilde{A} = (-1)^n$ denn $A \cdot \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(0)$. Da der Raum $\dot{\gamma}(0)^\perp$ Dimension $n - 1$ hat und A eine lineare Isometrie mit $\det A = (-1)^n$ ist, existiert nach Hilfssatz 8.44 ein $v \in \dot{\gamma}(0)^\perp$ mit $|v| = 1$ und $A \cdot v = v$. Diese letzte Gleichung ist äquivalent zu $P \cdot v = d_{p_0} F \cdot v$. Es sei nun X die Parallelverschiebung von v entlang $\gamma|_{[0,d]}$. Dann X erfüllt alle Eigenschaften in (8.33), da

$$X(d) = P(v) = d_{p_0} F \cdot v = d_{p_0} F \cdot X(0). \quad \square$$

Als Folgerung bekommen wir den Satz von Synge.

Satz 8.46 (Synge). *Es sei M eine n -dimensionale, kompakte Mannigfaltigkeit und g eine Riemannsche Metrik auf M mit $K > 0$. Dann gilt*

- (i) *wenn n gerade und M orientierbar ist, ist M einfach zusammenhängend;*
- (ii) *wenn n ungerade ist, ist M orientierbar.*

Beweis. Es sei $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ die Riemannsche universelle Überlagerung. Nach Folgerung 8.43 ist \tilde{M} kompakt. Außerdem $\tilde{K} > 0$, da π eine lokale Isometrie ist. Es sei nun n gerade und M orientierbar. Wenn ω eine Volumenform auf M ist, ist $\pi^* \omega$ eine Volumenform auf \tilde{M} , die eine bestimmte Orientierung induziert. Es sei $F : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ eine beliebige Decktransformation. Dann F ist eine Isometrie für \tilde{g} , die die Orientierung erhält: $F^*(\pi^* \omega) = (\pi \circ F)^* \omega = \pi^* \omega$. Nach dem Satz von Weinstein besitzt F einen Fixpunkt, sodass $F = \text{id}_{\tilde{M}}$. Da F beliebig war, ist die Fundamentalgruppe von M trivial.

Es sei nun n ungerade. Hier müssen wir die folgende Tatsache ohne Beweis annehmen: eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist orientierbar. Es sei dann eine Orientierung auf \tilde{M} gegeben. Wir nehmen eine beliebige Decktransformation $F : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ und behaupten, dass F die Orientierung erhält. Das ist klar, wenn $F = \text{id}_{\tilde{M}}$. Wenn $F \neq \text{id}_{\tilde{M}}$ die Orientierung umkehren würde, dann besitzt F nach dem Satz von Weinstein einen Fixpunkt, was ein Widerspruch ist. Wir konstruieren nun eine globale orientierte Familie von Rahmen auf M . Wir haben eine orientierte Familie von Rahmen $\{\tilde{\mathbf{e}}^{(i)}\}_{i \in I}$ definiert auf $\{\tilde{U}_i\}_{i \in I}$, sodass $\pi_i := \pi|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U_i := \pi(\tilde{U}_i)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir behaupten, dass die globale Familie von Rahmen $\{\mathbf{e}^{(i)} := d_{\pi_i^{-1} \pi_i} \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}\}$ orientiert ist. Es seien dazu $i, j \in I$ und $p \in U_i \cap U_j$. Wir wollen zeigen, dass $\mathbf{e}^{(i)}(p) \sim \mathbf{e}^{(j)}(p)$. Es seien $\tilde{p}_i \in \tilde{U}_i$ und $\tilde{p}_j \in \tilde{U}_j$, sodass $\pi(\tilde{p}_i) = p = \pi(\tilde{p}_j)$. Dann existiert eine Decktransformation $F : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$, sodass $F(\tilde{p}_i) = \tilde{p}_j$ und

$$d_{\tilde{p}_j} \pi \cdot d_{\tilde{p}_i} F = d_{\tilde{p}_i} \pi. \quad (8.35)$$

Da F die Orientierung erhält, folgt, dass $\tilde{\mathbf{e}}^j(\tilde{p}_j) \sim d_{\tilde{p}_i} F \cdot \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}(\tilde{p}_i)$. Wir wenden $d_{\tilde{p}_j} \pi$ auf diese Relation und finden mittels (8.35)

$$\mathbf{e}^{(j)}(p) = d_{\tilde{p}_j} \pi \cdot \tilde{\mathbf{e}}^{(j)}(\tilde{p}_j) \sim d_{\tilde{p}_j} \pi \cdot d_{\tilde{p}_i} F \cdot \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}(\tilde{p}_i) = d_{\tilde{p}_i} \pi \cdot \tilde{\mathbf{e}}^{(i)}(\tilde{p}_i) = \mathbf{e}^{(i)}(p).$$

Das zeigt, dass $\{\mathbf{e}^{(i)}\}$ orientiert ist und daher ist M orientierbar. □

Bemerkung 8.47. Die Bedingung über die Parität von n ist notwendig. Der reell projektive Raum $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ erbt von S^n eine Metrik mit Krümmung 1. Für n gerade ist aber $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ nicht orientierbar und für n ungerade ist $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ orientierbar aber nicht zusammenhängend: $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. △

Bemerkung 8.48. Man könnte sich fragen, was passiert mit dem Satz von Synge, wenn (M, g) vollständig aber nicht kompakt ist. Dann impliziert die Bedingung $K > 0$ nach dem Seelensatz von Cheeger und Gromoll, dass M diffeomorph zu \mathbb{R}^n ist. △

Bemerkung 8.49. Eine wichtige offene Frage von Hopf ist zu bestimmen, ob $S^2 \times S^2$ eine Riemannsche Metrik mit $K > 0$ besitzt, was nicht von dem Satz von Synge verhindert werden kann. △